2007 年度統計力学 II 宿題 8 (5 月 30 日日出題、6 月 6 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 状態密度 $D(\epsilon) = D_0 V \epsilon^2$ $(\epsilon \geq 0)$, $D(\epsilon) = 0$ $(\epsilon < 0)$ の時、転移温度以下の圧力を求めなさい。

[解答](実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)

圧力には、$\epsilon = 0$ の粒子は寄与しないので、教科書 (10.6) 式から

$$P = -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V}\int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon)\ln(1 - ze^{-\epsilon/k_{\mathrm{B}}T})d\epsilon \tag{1}$$

与えられている $D(\epsilon)$ を代入すると

$$= -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V}\int_{0}^{\infty} D_0 V\epsilon^2\ln(1 - ze^{-\epsilon/k_{\mathrm{B}}T})d\epsilon \tag{2}$$

$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ として、部分積分する。

$$= -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V}D_0 V\left\{\left[\frac{\epsilon^3}{3}\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon})\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{\epsilon^3}{3}\frac{\beta z e^{-\beta\epsilon}}{1 - ze^{-\beta\epsilon}}d\epsilon\right\} \tag{3}$$

$\epsilon = 0$ で、$\epsilon^3 = 0$、$\epsilon \to \infty$ で、$\epsilon^3\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon}) = 0$ だから

$$= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{V}D_0 V\int_0^{\infty}\frac{\epsilon^3}{3}\frac{\beta z e^{-\beta\epsilon}}{1 - ze^{-\beta\epsilon}}d\epsilon = D_0\int_0^{\infty}\frac{\epsilon^3}{3}\frac{1}{e^{\beta\epsilon}/z - 1}d\epsilon \tag{4}$$

$\beta\epsilon = x$ とすると

$$= \frac{D_0}{3}(k_{\mathrm{B}}T)^4\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x/z - 1}dx \tag{5}$$

転移温度以下なので $z = 1$

$$= \frac{D_0}{3}(k_{\mathrm{B}}T)^4\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x - 1}dx \tag{6}$$

教科書 P158 の脚注を使うと

$$= \frac{D_0}{3}(k_{\mathrm{B}}T)^4\frac{\pi^4}{15} \tag{7}$$

[問題 2.] BEC が起きても圧力に $\epsilon = 0$ の項が寄与しないことを次の方法（授業とは別の方法）で示せ。(10.17) 式だけを使い、エントロピーからヘルムホルツの自由エネルギーを計算して圧力を求めよ。$PV = \dfrac{2}{3}E$ を使ってはいけない。

[解答] BEC が起きている状況を考えるので、(10.17) で $z = 1$ として、ツェーター関数を使うと

$$E = \frac{3V}{2}\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{8}$$

これは、$T^{5/2}$ に比例しているので、定積比熱は、

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{15V}{4}\frac{k_{\mathrm{B}}}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{9}$$

教科書 P9(1.30) から

$$C_v = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{NV} \tag{10}$$

だから、P7 の熱力学第 3 法則と合せて

$$S = \int_0^T \frac{C_v}{T'}dT' \tag{11}$$

C_v は、$T^{3/2}$ に比例しているので、

$$= \frac{5V}{2}\frac{k_{\mathrm{B}}}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{12}$$

ヘルムホルツの自由エネルギーを A とすると、$A = E - TS$ だから、(8) 式と (12) 式から

$$A = \frac{3V}{2}\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) - T\frac{5V}{2}\frac{k_{\mathrm{B}}}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) = -V\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{13}$$

P10 の表の 1.1 から、圧力 P は、

$$P = -\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{NT} = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{14}$$

この式は、P147(10.10) 式の右辺の 2 項目、$\epsilon = 0$ の項を 0 にしたものに他ならない。

参考: ランダウ・リフシッツ「統計物理学上」小林秋男他訳（岩波書店）P228