2007 年度統計力学 II 宿題 9 (6 月 6 日出題、6 月 13 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 授業で導いた光子の $D(\omega)$ を使って、体積 V の箱に閉じ込めた光子の全エネルギーを計算しなさい。ただし、教科書の $D(\omega)$ は単位体積あたりになっていることに注意せよ。教科書 P158 の欄外注を使っても良い。

[解答](実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)

光子は化学ポテンシャル μ が 0 の理想ボース気体と考えられるので、教科書 P147 の (10.7) 式で $z = 1$ を代入した式によりエネルギーは計算できる。

$$E = \int_0^\infty \frac{\epsilon D(\epsilon)}{\exp[\beta\epsilon] - 1} d\epsilon \tag{1}$$

ϵ を ω に変数変換する。ϵ〜$\epsilon + d\epsilon$ の状態の数と ω〜$\omega + d\omega$ の状態の数は同じだから、$D(\epsilon)d\epsilon = D(\omega)d\omega$ が成り立つ。ただし、$\epsilon = \hbar\omega$、$d\epsilon = \hbar d\omega$ とする。これより

$$E = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega D(\omega)}{\exp[\beta\hbar\omega] - 1} d\omega \tag{2}$$

$D(\omega) = V\omega^2/(\pi^2 c^3)$ を代入すると

$$= \int_0^\infty \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{\exp[\beta\hbar\omega] - 1} d\omega \tag{3}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3}{\exp[\beta\hbar\omega] - 1} d\omega \tag{4}$$

$x = \beta\hbar\omega$ に変数変換すると、

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{(k_{\mathrm{B}}T)^3 x^3}{\hbar^2} \frac{1}{\exp[x] - 1} \frac{k_{\mathrm{B}}T dx}{\hbar} \tag{5}$$

P158 の注から、

$$= \frac{V}{\hbar^3 \pi^2 c^3} (k_{\mathrm{B}}T)^4 \times \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^2 V k_{\mathrm{B}}^4}{15\hbar^3 c^3} T^4 \tag{6}$$

光子のエネルギーは T^4 に比例するというシュテファン-ボルツマン則が導ける。

[問題 2.] 光子の数は人間には制御出来ないが、熱力学の原理によって決まると、授業中に説明した。具体的に理想ボース気体の統計力学を使って (平均の) 粒子数を求めなさい。ただし、$\omega > 0$ の光子の粒子数とする。[*1]

[解答] 授業中に説明した様に、熱力学の原理より化学ポテンシャル μ は 0 だから、問題 1 と同じ様に (10.5) 式を使うと

$$\langle N \rangle_{\omega>0} = \int_0^\infty \frac{D(\epsilon)}{\exp[\beta\epsilon]-1} d\epsilon \tag{7}$$

ω に変数変換すると、

$$= \int_0^\infty \frac{D(\omega)}{\exp[\beta\hbar\omega]-1} d\omega \tag{8}$$

$D(\omega) = V\omega^2/(\pi^2 c^3)$ を代入すると

$$= \int_0^\infty \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp[\beta\hbar\omega]-1} d\omega \tag{9}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{\exp[\beta\hbar\omega]-1} d\omega \tag{10}$$

$x = \beta\hbar\omega$ に変数変換すると、

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{(k_\mathrm{B}T)^2 x^2}{\hbar^2} \frac{1}{\exp[x]-1} \frac{k_\mathrm{B}T dx}{\hbar} \tag{11}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{(k_\mathrm{B}T)^3}{\hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{\exp[x]-1} dx \tag{12}$$

[*1] 訂正: プリントの問題文はこの但し書きが抜けていました。申し訳ありません。訂正して下さい。$\omega = 0$ のものは BEC と同じ事情で熱力学を使っても決めれません。

ボース-アインシュタイン積分からツェーター関数を使うと、

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{(k_{\mathrm{B}} T)^3}{\hbar^3} \Gamma(3) \zeta(3) \tag{13}$$