

2008 年度統計力学 II 宿題 13 (7 月 16 日出題) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 教科書 P173 の (11.28) の様な (ランダウ) 自由エネルギーを考えたとき、温度 T_c での M のとびを求めなさい。また、 $T > T_c$ と $T < T_c$ での比熱を計算しなさい。

[解答](実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)

(ランダウ) 自由エネルギーは、最小が平衡の値なので、最小を求めるためにまず極値を求める。極値は $A(M, T)$ の 1 階微分が 0 だから、教科書 p173(11.29) 式で

$$\frac{\partial A}{\partial M} = M[a(T - T_0) - bM^2 + cM^4] = 0 \quad (1)$$

したがって、極値は、

$$M = 0 \quad (2)$$

$$a(T - T_0) - bM^2 + cM^4 = 0 \quad (3)$$

のどちらかを満たす。

(3) 式が解を持つかどうか調べるために、 $X = M^2$ として、

$$f(X) = a(T - T_0) - bX + cX^2 \quad (4)$$

を考える。 $f(X) = 0$ が解を持つのは、判別式 D を計算すれば分かる。

$$D = b^2 - 4ac(T - T_0) \quad (5)$$

$D < 0$ 、あるいは、

$$T > T_1 \equiv T_0 + \frac{b^2}{4ac} \quad (6)$$

の時、 $f(X) = 0$ は解を持たない。したがって、(3) 式も解を持たない。また、 $f(X) > 0$ も示せる。

$D > 0$ の時は、 $f(X) = 0$ の解は 2 つあって、それぞれ

$$X_1 = \frac{b + \sqrt{D}}{2c} \quad (7)$$

$$X_2 = \frac{b - \sqrt{D}}{2c} \quad (8)$$

とすると、 X_2 の符号によって、(3) 式の解の個数が変わる。

1. $X_2 > 0$ の時: (3) 式の解は、 $\pm\sqrt{X_1}$ と $\pm\sqrt{X_2}$ の 4 つある。 $X_2 > 0$ になるためには、 $b > \sqrt{D} = \sqrt{b^2 - 4ac(T - T_0)}$ だから、 $T > T_0$ の時に相当する。
2. $X_2 < 0$ の時: $X = M^2$ なので、 X_2 に対応する (3) 式の解は無い。したがって、解は $\pm\sqrt{X_1}$ の 2 つしかない。 $X_2 < 0$ となるのは、 $T < T_0$ の時。

結局、(11.28) で与えられる $A(M, T)$ のグラフの形は、次の 3 通りが考えられる。

① $T \geq T_1$ の時: $A' \equiv \partial A(M, T) / \partial M$ とすると、増減表は

M	$-\infty$		0		∞
A'	$-\infty$	-	0	+	∞
$A(M, T)$	∞	減少	極小	増加	∞

つまり、 $M = 0$ で、 $A(0, T) = A_0(T)$ が最小。

② $T_1 > T \geq T_0$ の時: $A(M, T)$ は偶関数なので、増減表を $M \geq 0$ で書くと、

M	0		$\sqrt{X_2}$		$\sqrt{X_1}$		∞
A'	0	+	0	-	0	+	∞
$A(M, T)$	極小	増加	極大	減少	極小	増加	∞

この場合は極小が $M = 0$ と $M = \sqrt{X_1}$ の 2 つあり、 $A(0, T)$ と $A(\sqrt{X_1}, T)$ の大小で最小が決まる。付録で示したように、この大小は $T = T_c$ で入れ替わる。つまり、 $A(M, T)$ が最小になる M は、

$$T > T_c \text{ の時} \quad M = 0 \quad (9)$$

$$T < T_c \text{ の時} \quad M = \sqrt{X_1} = \sqrt{\frac{b + \sqrt{D}}{2c}} \quad (10)$$

したがって、 $T = T_c$ の M のとび ΔM は、

$$\Delta M = \sqrt{\frac{b + \sqrt{D}}{2c}} = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac(T_c - T_0)}}{2c}} \quad (11)$$

③ $T_0 > T$ の時: 増減表は、

M	0		$\sqrt{X_1}$		∞
A'	0	-	0	+	∞
$A(M, T)$	極大	減少	極小	増加	∞

つまり最小は、 $M = \sqrt{X_1}$ となる。

比熱は、最小の M を代入した $A(M, T)$ から計算できる。最小の M を $M^* = M^*(T)$ とすると、まずエントロピーを計算して、

$$S(T) = -\frac{dA(M^*(T), T)}{dT} \quad (12)$$

合成関数の微分法を使って

$$= -\left\{ \frac{\partial A(M^*(T), T)}{\partial M} \right\}_T \frac{dM^*(T)}{dT} - \left\{ \frac{\partial A(M^*(T), T)}{\partial T} \right\}_{M^*} \quad (13)$$

ところが、 $M = M^*$ は (1) 式を満たすので、

$$\left\{ \frac{\partial A(M^*(T), T)}{\partial M} \right\}_T = 0 \quad (14)$$

したがって、(13) 式は

$$S(T) = -\left\{ \frac{\partial A(M^*(T), T)}{\partial T} \right\}_{M^*} \quad (15)$$

教科書 (11.28) 式を代入して

$$= -\frac{\partial A_0(T)}{\partial T} - \frac{a}{2} M^{*2} \quad (16)$$

T_c の前後で

$$= \begin{cases} -\frac{\partial A_0(T)}{\partial T} & T > T_c \\ -\frac{\partial A_0(T)}{\partial T} - \frac{a}{2} X_1 & T < T_c \end{cases} \quad (17)$$

エントロピーは、 $T = T_c$ で不連続にジャンプする事が分かる。

比熱は、

$$C_H = T \frac{dS(T)}{dT} = \begin{cases} -T \frac{\partial^2 A_0(T)}{\partial T^2} & T > T_c \\ -T \frac{\partial^2 A_0(T)}{\partial T^2} - T \frac{a}{2} \frac{dX_1}{dT} & T < T_c \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 X_1 の温度微分は、(7) 式から計算できて、

$$\frac{dX_1}{dT} = \frac{d}{dT} \frac{b + \sqrt{D}}{2c} = \frac{d}{dT} \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac(T - T_0)}}{2c} \quad (19)$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{b^2 - 4ac(T - T_0)}} \quad (20)$$

[問題 2.] P.186 演習問題 [5]

[解答] 教科書 P224 演習問題解答を参照の事。

[付録] [問題 1.] の T_c の計算

2 ページで説明したように、 $T_1 > T \geq T_0$ の時、極小が 2 つあって、その時の $A(M, T)$ の値が等しい温度が T_c になる。それぞれの極小について $A(M, T)$ を計算すると、

$$A(0, T) = A_0(T) \quad (21)$$

$$A(\sqrt{X_1}, T) = A_0(T) + \frac{a}{2}(T - T_0)X_1 - \frac{b}{4}X_1^2 + \frac{c}{6}X_1^3 \quad (22)$$

$a(T - T_0) - bX_1 + cX_1^2 = 0$ なので、この両辺に $X_1/6$ をかけると、

$$\frac{a}{6}(T - T_0)X_1 - \frac{b}{6}X_1^2 + \frac{c}{6}X_1^3 = 0 \quad (23)$$

(23) 式を $cX_1^3/6$ について解いて、(22) 式に代入すると、

$$A(\sqrt{X_1}, T) = A_0(T) + \frac{a}{3}(T - T_0)X_1 - \frac{b}{12}X_1^2 \quad (24)$$

$$= A_0(T) + X_1 \left\{ \frac{a}{3}(T - T_0) - \frac{b}{12}X_1 \right\} \quad (25)$$

つまり、 $T = T_c$ では、

$$\frac{a}{3}(T_c - T_0) = \frac{b}{12}X_1 \quad (26)$$

(7) 式を代入すると、

$$= \frac{b}{12} \frac{b + \sqrt{D}}{2c} \quad (27)$$

$$\frac{8ac}{b}(T_c - T_0) = b + \sqrt{D} \quad (28)$$

$$\left\{ \frac{8ac}{b}(T_c - T_0) - b \right\}^2 = D \quad (29)$$

(5) 式を代入すると、

$$\left\{ \frac{8ac}{b}(T_c - T_0) - b \right\}^2 = b^2 - 4ac(T - T_0) \quad (30)$$

$$\frac{64a^2c^2}{b^2}(T_c - T_0) - 16ac = -4ac \quad (31)$$

$$\frac{64a^2c^2}{b^2}(T_c - T_0) = 12ac \quad (32)$$

$$T_c = T_0 + \frac{3b^2}{16ac} \quad (33)$$