2008年度統計力学II 宿題6 (5月28日出題、6月4日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題1.] 理想フェルミ気体でEをTで展開してT^2まで求めよ。ただし係数をNで表し、省略した計算を補うこと。

[解答] 教科書P138にある

$$E = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T\frac{gV}{\lambda_T^3}f_{5/2}(z) \tag{1}$$

にP141の展開式を代入する。

$$E = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T\frac{gV}{\lambda_T^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}(\ln z)^{5/2}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\frac{1}{(\ln z)^2}+\cdots\right] \tag{2}$$

$\ln z = \mu/(k_{\mathrm{B}}T)$を代入

$$= \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T\frac{gV}{\lambda_T^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{5/2}\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\mu}\right)^2+\cdots\right] \tag{3}$$

これで、EをTで展開できた。ただし、係数はμなので、Nに直す。

$\mu = \epsilon_F + C_2 T^2 + \cdots$ を代入すれば、ϵ_F も C_2 も N で表せるから、

$$\begin{aligned}
E &= \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T\frac{gV}{\lambda_T^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{\epsilon_F + C_2T^2+\cdots}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{5/2} \\
&\quad\times\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon_F+C_2T^2+\cdots}\right)^2+\cdots\right] \quad (4)\\
&= \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T\frac{gV}{\lambda_T^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{\epsilon_F}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{5/2}\left(1+\frac{C_2T^2}{\epsilon_F}+\cdots\right)^{5/2} \\
&\quad\times\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon_F}\right)^2\left(1+\frac{C_2T^2}{\epsilon_F}+\cdots\right)^{-2}+\cdots\right] \quad (5)\\
&= \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T\frac{gV}{\lambda_T^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{\epsilon_F}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{5/2}\left(1+\frac{5}{2}\frac{C_2T^2}{\epsilon_F}+T^3\,\text{の項}+\cdots\right) \\
&\quad\times\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon_F}\right)^2+T^3\,\text{の項}+\cdots\right] \quad (6)
\end{aligned}$$

$C_2 = -(\pi^2/12)(k_{\mathrm{B}}^2/\epsilon_F)$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T\frac{gV}{\lambda_T^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{\epsilon_F}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{5/2}\left(1-\frac{5}{2}\frac{\pi^2}{12}\frac{k_{\mathrm{B}}^2T^2}{\epsilon_F^2}+T^3\,\text{の項}+\cdots\right) \\
&\quad\times\left[1+\frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon_F}\right)^2+T^3\,\text{の項}+\cdots\right] \quad (7)\\
&= \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T\frac{gV}{\lambda_T^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{\epsilon_F}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{5/2} \\
&\quad\times\left\{1+\left(-\frac{5\pi^2}{24}+\frac{5\pi^2}{8}\right)\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon_F}\right)^2+T^3\,\text{の項}+\cdots\right\} \quad (8)\\
&= \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T\frac{gV}{\lambda_T^3}\frac{8}{15\sqrt{\pi}}\left(\frac{\epsilon_F}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^{5/2}\left\{1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\epsilon_F}\right)^2+T^3\,\text{の項}+\cdots\right\} \quad (9)
\end{aligned}$$

$\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_{\rm B} T}$ だから

$$= \frac{3}{2} k_{\rm B} T g V \frac{(2\pi m k_{\rm B} T)^{3/2}}{h^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{\epsilon_F}{k_{\rm B} T}\right)^{5/2}$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_{\rm B} T}{\epsilon_F}\right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots \right\} \tag{10}$$

$$= \frac{4\pi}{5} g V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} (\epsilon_F)^{5/2} \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_{\rm B} T}{\epsilon_F}\right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots \right\} \tag{11}$$

教科書 P135 の (9.12) 式を使って

$$= \frac{3}{5} N \epsilon_{\rm F} \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_{\rm B} T}{\epsilon_F}\right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots \right\} \tag{12}$$

[問題 2.] 「授業ノート 1」(22) 式から (23) 式を導く条件から $\mu < 0$ を示せ。ただし最低エネルギー準位を 0 とする。

[解答] 「授業ノート 1」でやったように、大分配関数は、$\Xi = \prod_k \Xi_k$ のように書ける。Ξ_k は、ボース粒子の場合、プリント P8 の (22) 式

$$\Xi_k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z e^{-\beta \epsilon_k} \right)^n \tag{13}$$

で表せる。これは、無限等比級数で、収束するためには、

$$z e^{-\beta \epsilon_k} < 1 \tag{14}$$

$z = \exp[\beta\mu]$ だから、$\beta > 0$ を使って、

$$\mu - \epsilon_k < 0 \tag{15}$$

これはすべてのエネルギー準位 ϵ_k で、成り立たなければならない。

もし、箱に入った自由粒子のようにエネルギー準位に最小がある時は、その値を ϵ_0 とすると、

$$\mu < \epsilon_0 \tag{16}$$

であれば、$\epsilon_0 \leq \epsilon_k$ だから、全てのエネルギー準位で、(15) 式を満たす。問題では $\epsilon_0 = 0$ なので、$\mu < 0$ が示せる。