2008年度統計力学II 宿題7 (6月4日日出題、6月11日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題1.] $D(\epsilon)$ が (10.8) 式のとき転移が起こる粒子数 $N_B(T)$ が $T^{\frac{3}{2}}$ に比例することを示せ。

[解答] 理想ボース気体では、粒子数 N を温度 T と化学ポテンシャル μ で表すと、

$$N = \sum_l \frac{1}{\exp[(\epsilon_l - \mu)/k_{\mathrm{B}}T] - 1} \tag{1}$$

体積が充分大きいとき、この和は積分に直せるが、ボース-アインシュタイン凝縮が起こると、$\epsilon_l = 0$ の粒子数が無視できなくてなる。その転移は、温度を一定にすると、

$$N = N_B(T) = \int D(\epsilon) \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T] - 1} \tag{2}$$

となる粒子数で起こる。$D(\epsilon)$ に教科書 (10.8) 式を代入すると

$$N_B(T) = \int 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T] - 1} \tag{3}$$

$x = \epsilon/k_{\mathrm{B}}T$ に変数変換すると、

$$\begin{aligned} N_B &= 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int \sqrt{x k_{\mathrm{B}} T} \frac{k_{\mathrm{B}} T dx}{\exp[x] - 1} && (4) \\ &= 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} \int \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} && (5) \end{aligned}$$

(10.12) 式で定義されるボース-アインシュタイン積分を使うと、

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) b_{3/2}(1) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{6}$$

だから、$\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ を使って、

$$N_B(T) = 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{7}$$

$$= V \left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \tag{8}$$

[問題 2.] 2 次元の平面に閉じこめられたボース粒子の BEC はどうなるか。

[解答] 授業で説明した様に、与えられた粒子数 N のもとで、化学ポテンシャル μ は、

$$N = B_1(\mu) + B_2(\mu) \tag{9}$$

の方程式を解くことで得られる。ここで、

$$B_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\epsilon)}{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] - 1} d\epsilon, \qquad B_2(\mu) = \frac{1}{e^{-\beta\mu} - 1} \tag{10}$$

$B_2(\mu)$ は、$\mu \to 0$ で発散するのは 2 次元でも同じ。

3 次元と違うのは、$B_1(\mu)$ についてで、P144 演習問題 [5] で解いた 2 次元平面の状態密度 $D(\epsilon) = mA/\pi\hbar^2 (\epsilon \geq 0)$ を代入すると、

$$B_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\epsilon)}{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] - 1} d\epsilon = \int_0^{\infty} \frac{mA}{\pi\hbar^2} \frac{d\epsilon}{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] - 1} \tag{11}$$

この積分は $\mu \to 0$ で発散する。なぜなら、積分の下限に注目すると、ϵ は充分小さいから $\exp[\beta\epsilon] = 1 + \beta\epsilon + \cdots$ で、$(\exp[\beta\epsilon] - 1) \sim \beta\epsilon$となり、被積分関数は、$\epsilon^{-1}$ に比例する。このような被積分関数を 0 から積分すると対数で発散することが知られている。

3 次元の場合は、μ が 0 から充分離れていれば、$B_1(\mu)$ は V に比例するので、$B_1(\mu) >> B_2(\mu)$ となり、$B_2(\mu)$ は無視できる。しかし、μ が 0 に近づいてくると、$B_2(\mu)$ が発散するので、無視できなくなる。これがボース-アインシュタイン凝縮。

ところが、2 次元の場合は、$B_1(\mu)$ も $\mu \to 0$ で発散するので、すべての μ の値で $B_1(\mu) >> B_2(\mu)$ が成り立ち、常に $B_2(\mu)$ を無視できる。したがって、ボース-アインシュタイン凝縮は起こらない。