2008 年度統計力学 II 宿題 8 (6 月 11 日日出題、6 月 18 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 理想ボース気体で $D(\epsilon) = D_0 V \epsilon^2 (\epsilon \geq 0)$,$D(\epsilon) = 0 (\epsilon < 0)$ の時、転移点以下の圧力を求めなさい。

[解答](実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)

圧力には、$\epsilon = 0$ の粒子は寄与しないので、教科書 (10.6) 式から

$$P = -\frac{k_{\rm B}T}{V}\int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon)\ln(1 - ze^{-\epsilon/k_{\rm B}T})d\epsilon \tag{1}$$

与えられている $D(\epsilon)$ を代入すると

$$= -\frac{k_{\rm B}T}{V}\int_{0}^{\infty} D_0 V\epsilon^2\ln(1 - ze^{-\epsilon/k_{\rm B}T})d\epsilon \tag{2}$$

$\beta = 1/k_{\rm B}T$ として、部分積分する。

$$= -\frac{k_{\rm B}T}{V}D_0 V\left\{\left[\frac{\epsilon^3}{3}\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon})\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{\epsilon^3}{3}\frac{\beta ze^{-\beta\epsilon}}{1 - ze^{-\beta\epsilon}}d\epsilon\right\} \tag{3}$$

$\epsilon = 0$ で、$\epsilon^3 = 0$、$\epsilon \to \infty$ で、$\epsilon^3\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon}) = 0$ だから

$$= \frac{k_{\rm B}T}{V}D_0 V\int_0^{\infty}\frac{\epsilon^3}{3}\frac{\beta ze^{-\beta\epsilon}}{1 - ze^{-\beta\epsilon}}d\epsilon = D_0\int_0^{\infty}\frac{\epsilon^3}{3}\frac{1}{e^{\beta\epsilon}/z - 1}d\epsilon \tag{4}$$

$\beta\epsilon = x$ とすると

$$= \frac{D_0}{3}(k_{\rm B}T)^4\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x/z - 1}dx \tag{5}$$

転移温度以下なので $z = 1$

$$= \frac{D_0}{3}(k_{\rm B}T)^4\int_0^{\infty}\frac{x^3}{e^x - 1}dx \tag{6}$$

教科書 P158 の脚注を使うと

$$= \frac{D_0}{3}(k_\mathrm{B}T)^4\frac{\pi^4}{15} \tag{7}$$

[問題 2.] .BEC が起きても圧力に $\epsilon = 0$ の項が寄与しないことを授業と別の方法で示せ。(10.17) と熱力学の関係式だけを使い、エントロピーからヘルムホルツの自由エネルギーを計算して圧力を求めよ。(10.18) は使ってはいけない。

[解答] BEC が起きている状況を考えるので、(10.17) で $z = 1$ として、ツェーター関数を使うと

$$E = \frac{3V}{2}\frac{k_\mathrm{B}T}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{8}$$

これは、$T^{5/2}$ に比例しているので、定積比熱は、

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{15V}{4}\frac{k_\mathrm{B}}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{9}$$

教科書 P9(1.30) から

$$C_v = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{NV} \tag{10}$$

だから、P7 の熱力学第 3 法則と合せて

$$S = \int_0^T \frac{C_v}{T'}dT' \tag{11}$$

C_v は、$T^{3/2}$ に比例しているので、

$$= \frac{5V}{2}\frac{k_\mathrm{B}}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{12}$$

ヘルムホルツの自由エネルギーを A とすると、$A = E - TS$ だから、(8) 式と (12) 式から

$$A = \frac{3V}{2}\frac{k_\mathrm{B}T}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) - T\frac{5V}{2}\frac{k_\mathrm{B}}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) = -V\frac{k_\mathrm{B}T}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{13}$$

P10 の表の 1.1 から、圧力 P は、

$$P = -\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{NT} = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\lambda_T^3}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \tag{14}$$

一方、教科書 P147(10.10) 式は、[問題 1.] と同様に、

$$P = \frac{2\pi}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(k_{\mathrm{B}}T)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x/z-1}dx + \frac{1}{V}\ln(1-z) \tag{15}$$

と変形できるが、右辺の 2 項目は、$\epsilon = 0$ の寄与を表す。1 項目は、$\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}}T}$ と教科書 P148(10.12) 式のボース-アインシュタイン積分を使って、

$$\frac{2\pi}{3}\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}(k_{\mathrm{B}}T)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x/z-1}dx = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\lambda_T^3}b_{5/2}(z) \tag{16}$$

と書けるから、$z = 1$ の時 (14) 式と比べれば、(15) 式の右辺第 2 項は 0 になることが分かる。

参考: ランダウ・リフシッツ「統計物理学上」小林秋男他訳（岩波書店）P228