2008 年度統計力学 II 宿題 9 (6 月 18 日出題、6 月 25 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 教科書 P161 の演習問題 [4]

[解答] 教科書 P222 で分からなかったら聞きに来て下さい。

[問題 2.] 光子の数は人間には制御出来ないが、熱力学の原理によって決まると、授業中に説明した。具体的に理想ボース気体の統計力学を使って (平均の) 粒子数を求めなさい。ただし、$\omega > 0$ の光子の粒子数とする。[*1]

[解答] 授業中に説明した様に、熱力学の原理より化学ポテンシャル μ は 0 だから、問題 1 と同じ様に (10.5) 式を使うと

$$\langle N \rangle_{\omega>0} = \int_0^\infty \frac{D(\epsilon)}{\exp[\beta\epsilon]-1} d\epsilon \tag{1}$$

ω に変数変換すると、

$$= \int_0^\infty \frac{D(\omega)}{\exp[\beta\hbar\omega]-1} d\omega \tag{2}$$

$D(\omega) = V\omega^2/(\pi^2 c^3)$ を代入すると

$$= \int_0^\infty \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp[\beta\hbar\omega]-1} d\omega \tag{3}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{\exp[\beta\hbar\omega]-1} d\omega \tag{4}$$

$x = \beta\hbar\omega$ に変数変換すると、

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{(k_B T)^2 x^2}{\hbar^2} \frac{1}{\exp[x]-1} \frac{k_B T dx}{\hbar} \tag{5}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{(k_B T)^3}{\hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{\exp[x]-1} dx \tag{6}$$

[*1] 訂正: プリントの問題文はこの但し書きが抜けていました。申し訳ありません。訂正して下さい。$\omega = 0$ のものは BEC と同じ事情で熱力学を使っても決めれません。

ボース-アインシュタイン積分からツェーター関数を使うと、

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{(k_{\mathrm{B}} T)^3}{\hbar^3} \Gamma(3) \zeta(3) \tag{7}$$