2009 年度統計力学 II 宿題 3 (5 月 13 日出題、5 月 20 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 教科書演習問題 P 144 [5] (3) ただしスピン自由度は無視する。

[解答] ここでは、P220 の解答と違って、授業で説明した方法で解答する。

出発点は、授業で説明したのと同じで、

$$\epsilon_{\vec{l}} = \frac{\hbar^2}{2m}|\vec{k}(\vec{l})|^2 \qquad \vec{k}(\vec{l}) = \frac{2\pi}{L}\vec{l} \tag{1}$$

ただし、波数ベクトルは 2 次元で、つまり $\vec{l} = (l_x, l_y)$、$l_x = 0, \pm1, \pm2 \ldots, l_y = 0, \pm1, \pm2 \ldots$

1 粒子の固有状態が波数空間の点で表される事には変わりないが、2 次元空間に対応させる。したがって、$\Sigma(\epsilon)$ は球ではなく、円の中の点の数を数えれば良い。

$$\Sigma(\epsilon) = \text{半径}\sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}\text{の円の内側にある点の数} \tag{2}$$

$$= \frac{\text{円の面積}}{(\text{間隔})^2} \tag{3}$$

$$= \frac{\pi\left(\sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} = \pi\left(\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}\right)\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-2} = \frac{mA\epsilon}{2\pi\hbar^2} \tag{4}$$

したがって、$D(\epsilon) = d\Sigma(\epsilon)/d\epsilon$ から

$$D(\epsilon) = \frac{mA}{2\pi\hbar^2} \tag{5}$$

ϵ によらない定数になる。ただし、(5) 式が成り立つのは $\epsilon \geq 0$ だけで、$\epsilon < 0$ では、$D(\epsilon) = 0$ となる。

[問題 2.] 教科書演習問題 P 146 [6] (1) ただし g は無視する。(g=1)

[解答] こちらも、授業で説明した方法で解答すると、今度は出発点が違って、$p = \hbar|\mathbf{k}|$ だから、

$$\epsilon_{\vec{l}} = Ap^a = A(\hbar|\vec{k}(\vec{l})|)^a \qquad \vec{k}(\vec{l}) = \frac{2\pi}{L}\vec{l} \tag{6}$$

ただし、波数ベクトルは授業で説明したのと同じで、つまり $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$、$l_x = 0, \pm1, \pm2 \ldots, l_y = 0, \pm1, \pm2 \ldots, l_z = 0, \pm1, \pm2 \ldots$

1 粒子の固有状態は今度は授業と同じ 3 次元波数空間の点で表され、$\Sigma(\epsilon)$ は球面の数を数えれば良い。

$$
\begin{aligned}
\Sigma(\epsilon) &= \text{半径}\left(\frac{\epsilon}{A\hbar^a}\right)^{1/a}\text{の球面の内側にある点の数} && (7)\\
&= \frac{\text{球の体積}}{(\text{間隔})^3} && (8)\\
&= \frac{\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\epsilon}{A\hbar^a}\right)^{3/a}}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\epsilon}{A\hbar^a}\right)^{3/a}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-3} && (9)
\end{aligned}
$$

$L^3 = V$ だから

$$
= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\epsilon}{A}\right)^{3/a}\frac{1}{\hbar^3}\frac{V}{(2\pi)^3} \tag{10}
$$

$\hbar = h/(2\pi)$ だから

$$
= \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\epsilon}{A}\right)^{3/a}\frac{1}{h^3}V \tag{11}
$$

したがって、$D(\epsilon) = d\Sigma(\epsilon)/d\epsilon$ から

$$
D(\epsilon) = \frac{4\pi}{a}\frac{\epsilon^{3/a-1}}{A^{3/a}}\frac{1}{h^3}V \tag{12}
$$

$$
\tag{13}
$$

この場合も、$\epsilon < 0$ では、$D(\epsilon) = 0$ となる。