2009 年度統計力学 II 宿題 6 (6 月 3 日出題、6 月 10 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] μ と E を T で展開して T^2 まで求めよ。授業で略した計算を補え。

[解答] 教科書 P137(9.23) 式

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{\lambda_T^3} f_{3/2}(z) \tag{1}$$

から、P141 の $f_{3/2}(z)$ の展開式を使って、

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{\lambda_T^3} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\ln z)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{(\ln z)^2} + \cdots \right] \tag{2}$$

$\ln z = \mu/(k_\mathrm{B}T)$ だから、

$$= \frac{g}{\lambda_T^3} \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{k_\mathrm{B}T} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{\mu} \right)^2 + \cdots \right] \tag{3}$$

変形して、

$$\left(\frac{\mu}{k_\mathrm{B}T} \right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\lambda_T^3}{g} \frac{N}{V} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{\mu} \right)^2 + \cdots \right]^{-1} \tag{4}$$

両辺を 2/3 乗

$$\frac{\mu}{k_\mathrm{B}T} = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\lambda_T^3}{g} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_\mathrm{B}T}{\mu} \right)^2 + \cdots \right]^{-2/3} \tag{5}$$

$\mu = C_0 + C_1 T + C_2 T^2 + \cdots$ を両辺に代入して、T のベキの係数を比べる。

$$
\begin{aligned}
&C_0 + C_1 T + C_2 T^2 + \cdots \\
&= k_{\mathrm{B}} T \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\lambda_T^3}{g} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \\
&\times \left[1 + \frac{\pi^2}{8} (k_{\mathrm{B}} T)^2 (C_0 + C_1 T + C_2 T^2 + \cdots)^{-2} + \cdots \right]^{-2/3} \qquad (6) \\
&= k_{\mathrm{B}} T \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\lambda_T^3}{g} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \\
&\times \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{C_0} \right)^2 (1 + \frac{C_1}{C_0} T + \frac{C_2}{C_0} T^2 + \cdots)^{-2} + \cdots \right]^{-2/3} \qquad (7) \\
&= k_{\mathrm{B}} T \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\lambda_T^3}{g} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \\
&\times \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{C_0} \right)^2 (1 - 2\frac{C_1}{C_0} T + T^3 \text{ の項} + \cdots) + \cdots \right]^{-2/3} \qquad (8) \\
&= k_{\mathrm{B}} T \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\lambda_T^3}{g} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{C_0} \right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots \right] \qquad (9)
\end{aligned}
$$

$\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}$ だから、

$$
\begin{aligned}
k_{\mathrm{B}} T \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\lambda_T^3}{g} \frac{N}{V} \right)^{2/3} &= k_{\mathrm{B}} T \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4g} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m k_{\mathrm{B}} T} \qquad (10) \\
&= \frac{(2\pi)^2 \hbar^2}{2\pi m} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4g} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \qquad (11) \\
&= \frac{4\pi \hbar^2}{2m} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4g} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \qquad (12) \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} \left(4^{3/2} \pi^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4g} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \qquad (13) \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} \left(8\pi^2 \frac{3}{4g} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

教科書 (9.14) 式からこれは、 ϵ_F と等しい事が分かる。したがって、

$$C_0 + C_1 T + C_2 T^2 + \cdots = \epsilon_F \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{C_0} \right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots \right] \tag{15}$$

ゆえに、$C_0 = \epsilon_F$、$C_1 = 0$、

$$C_2 = -\frac{\pi^2}{12} \frac{k_{\mathrm{B}}^2}{\epsilon_F} \tag{16}$$

次に教科書 P138 にある

$$E = \frac{3}{2} k_{\mathrm{B}} T \frac{gV}{\lambda_T^3} f_{5/2}(z) \tag{17}$$

に P141 の展開式を代入する。

$$E = \frac{3}{2} k_{\mathrm{B}} T \frac{gV}{\lambda_T^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} (\ln z)^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \frac{1}{(\ln z)^2} + \cdots \right] \tag{18}$$

$\ln z = \mu/(k_{\mathrm{B}} T)$ を代入

$$= \frac{3}{2} k_{\mathrm{B}} T \frac{gV}{\lambda_T^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{\mu}{k_{\mathrm{B}} T} \right)^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{\mu} \right)^2 + \cdots \right] \tag{19}$$

これで、E を T で展開できた。ただし、係数は μ なので、N に直す。

$\mu = \epsilon_F + C_2 T^2 + \cdots$ を代入すれば、ϵ_F も C_2 も N で表せるから、

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{3}{2} k_{\mathrm{B}} T \frac{gV}{\lambda_T^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{\epsilon_F + C_2 T^2 + \cdots}{k_{\mathrm{B}} T} \right)^{5/2} \\
&\quad \times \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{\epsilon_F + C_2 T^2 + \cdots} \right)^2 + \cdots \right] \qquad (20) \\
&= \frac{3}{2} k_{\mathrm{B}} T \frac{gV}{\lambda_T^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{\epsilon_F}{k_{\mathrm{B}} T} \right)^{5/2} \left(1 + \frac{C_2 T^2}{\epsilon_F} + \cdots \right)^{5/2} \\
&\quad \times \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{\epsilon_F} \right)^2 \left(1 + \frac{C_2 T^2}{\epsilon_F} + \cdots \right)^{-2} + \cdots \right] \qquad (21) \\
&= \frac{3}{2} k_{\mathrm{B}} T \frac{gV}{\lambda_T^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{\epsilon_F}{k_{\mathrm{B}} T} \right)^{5/2} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{C_2 T^2}{\epsilon_F} + T^3 \text{ の項} + \cdots \right) \\
&\quad \times \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{\epsilon_F} \right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots \right] \qquad (22)
\end{aligned}
$$

$C_2 = -(\pi^2/12)(k_{\mathrm{B}}^2/\epsilon_F)$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} k_{\mathrm{B}} T \frac{gV}{\lambda_T^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{\epsilon_F}{k_{\mathrm{B}} T} \right)^{5/2} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{\pi^2}{12} \frac{k_{\mathrm{B}}^2 T^2}{\epsilon_F^2} + T^3 \text{ の項} + \cdots \right) \\
&\quad \times \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{\epsilon_F} \right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots \right] \qquad (23) \\
&= \frac{3}{2} k_{\mathrm{B}} T \frac{gV}{\lambda_T^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{\epsilon_F}{k_{\mathrm{B}} T} \right)^{5/2} \\
&\quad \times \left\{ 1 + \left(-\frac{5\pi^2}{24} + \frac{5\pi^2}{8} \right) \left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{\epsilon_F} \right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots \right\} \qquad (24) \\
&= \frac{3}{2} k_{\mathrm{B}} T \frac{gV}{\lambda_T^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{\epsilon_F}{k_{\mathrm{B}} T} \right)^{5/2} \left\{ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{k_{\mathrm{B}} T}{\epsilon_F} \right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots \right\} \qquad (25)
\end{aligned}
$$

$\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_\mathrm{B} T}$ だから

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} k_\mathrm{B} T g V \frac{(2\pi m k_\mathrm{B} T)^{3/2}}{h^3} \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left(\frac{\epsilon_F}{k_\mathrm{B} T}\right)^{5/2} \\
&\times \left\{1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{k_\mathrm{B} T}{\epsilon_F}\right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots\right\} \qquad (26) \\
&= \frac{4\pi}{5} g V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} (\epsilon_F)^{5/2} \left\{1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{k_\mathrm{B} T}{\epsilon_F}\right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots\right\} \qquad (27)
\end{aligned}
$$

教科書 P135 の (9.12) 式を使って

$$
= \frac{3}{5} N \epsilon_\mathrm{F} \left\{1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{k_\mathrm{B} T}{\epsilon_F}\right)^2 + T^3 \text{ の項} + \cdots\right\} \tag{28}
$$

[問題 2.] 「授業ノート」(16) 式から (17) 式を導く条件から $z < 1$ を示しなさい。[*1]

[解答] 「授業ノート 1」でやったように、大分配関数は、$\Xi = \prod_k \Xi_k$ のように書ける。Ξ_k は、ボース粒子の場合、プリント P7 の (16) 式

$$
\Xi_k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z e^{-\beta \epsilon_k}\right)^n \tag{29}
$$

で表せる。これは、無限等比級数で、収束するためには、

$$
z e^{-\beta \epsilon_k} < 1 \tag{30}
$$

$z = \exp[\beta\mu]$ だから、$\beta > 0$ を使って、

$$
\mu - \epsilon_k < 0 \tag{31}
$$

これはすべてのエネルギー準位 ϵ_k で、成り立たなければならない。

[*1] 「授業ノート」とは、2 回目の講義の時にお配りした「授業ノート 1」のことです。分からなかった人がいたら申し訳ありませんでした。

もし、箱に入った自由粒子のようにエネルギー準位に最小がある時は、その値を ϵ_0 とすると、

$$\mu < \epsilon_0 \tag{32}$$

であれば、$\epsilon_0 \leq \epsilon_k$ だから、全てのエネルギー準位で、(31) 式を満たす。問題では $\epsilon_0 = 0$ なので、$\mu < 0$ が示せる。