2009 年度統計力学 II 宿題 7 (6 月 4 日日出題、6 月 11 日提出) 解答

担当 吉森 明

7 月 3 日訂正しました。訂正した箇所は赤字で示してあります。申し訳ありませんでした。

[問題 1.] $T < T_c$ のとき、$\epsilon > 0$ の粒子数 N_e および $\epsilon = 0$ の粒子数 N_0 を全粒子数 N と T、T_c であらわせ。

[解答] 1 粒子のエネルギー準位が充分密な時、理想ボース気体は、粒子数 N を温度 T と化学ポテンシャル μ で表すと、

$$N = \int D(\epsilon) \frac{d\epsilon}{\exp[(\epsilon - \mu)/k_{\mathrm{B}}T] - 1} + N_0 \tag{1}$$

$T < T_c$ では、$\mu = 0$ だから

$$N = \int D(\epsilon) \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T] - 1} + N_0 \tag{2}$$

$D(\epsilon)$ に教科書 (10.8) 式を代入すると

$$N = \int 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T] - 1} + N_0 \tag{3}$$

右辺の 1 項目が $\epsilon > 0$ の粒子数、つまり N_e、2 項目が $\epsilon = 0$ の粒子数だから、

$$N_e = \int 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T] - 1} \tag{4}$$

$$N_0 = N - \int 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T] - 1} \tag{5}$$

しかし、問題は T_c を使って答えなければならないので、次に T_c を求める。T_c は、

$$N = \int 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T] - 1} \tag{6}$$

で、右辺の T に T_c を代入して、T_c について解けば良い。

$$N = \int 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T_c] - 1} \tag{7}$$

右辺を $x = \epsilon/k_{\mathrm{B}}T_c$ で変数変換すると

$$= 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int \sqrt{x k_{\mathrm{B}}T_c} \frac{k_{\mathrm{B}}T_c dx}{\exp[x] - 1} \tag{8}$$

$$= 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}}T_c)^{3/2} \int \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} \tag{9}$$

T_c について解くと

$$T_c = k_{\mathrm{B}}^{-1} N^{2/3} (2\pi V)^{-2/3} \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{-1} \left(\int \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1}\right)^{-2/3} \tag{10}$$

あるいは、

$$2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} = N (k_{\mathrm{B}}T_c)^{-3/2} \tag{11}$$

も示せる。

(4) 式と (5) 式も同様の変数変換をすると、

$$N_e = 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} \int \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} \tag{12}$$

$$N_0 = N - 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} \int \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} \tag{13}$$

(11) 式を代入すると、

$$N_e = N (k_{\mathrm{B}}T_c)^{-3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} = N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{14}$$

$$N_0 = N - N (k_{\mathrm{B}}T_c)^{-3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} = N - N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{15}$$

[問題 2.]2 次元平面に閉じ込められたボース粒子の BEC はどうなるか？

[解答] 授業で説明した様に、与えられた粒子数 N のもとで、絶対活動度 z は、

$$B(z) \equiv \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D(\epsilon)}{\exp[\beta\epsilon]/z-1}d\epsilon + \frac{1}{N}\frac{z}{1-z} = 1 \tag{16}$$

を解くことで得られる。ここで、$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ を表す。$z/(1-z)$ は、$z \to 1$ で発散するのは 2 次元でも同じ。

3 次元と違うのは、$B(z)$ の第 1 項についてで、P144 演習問題 [5] で解いた 2 次元平面の状態密度 $D(\epsilon) = mA/\pi\hbar^2(\epsilon \geq 0)$ を代入すると、

$$\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{D(\epsilon)}{\exp[\beta\epsilon]/z-1}d\epsilon = \frac{1}{N}\int_{0}^{\infty}\frac{mA}{\pi\hbar^2}\frac{d\epsilon}{\exp[\beta\epsilon]/z-1} \tag{17}$$

この積分は $z \to 1$ で発散する。なぜなら、積分の下限に注目すると、ϵ は充分小さいから $\exp[\beta\epsilon] = 1 + \beta\epsilon + \cdots$ で、$(\exp[\beta\epsilon]-1) \sim \beta\epsilon$となり、被積分関数は、$\epsilon^{-1}$ に比例する。このような被積分関数を 0 から積分すると対数で発散することが知られている。

3 次元の場合は、z が 1 から充分離れていれば、第 2 項は $1/N$ に比例するので、充分小さくなり無視できる。しかし、z が 1 に近づいてくると、第 2 項は発散するので無視できなくなる。これがボース-アインシュタイン凝縮。

ところが、2 次元の場合は、第 1 項も $z \to 1$ で発散するので、すべての z の値で第 2 項より第 1 項が大きくなり、常に第 2 項を無視できる。したがって、ボース-アインシュタイン凝縮は起こらない。