

2009 年度統計力学 II 宿題 8 (6 月 17 日日出題、6 月 24 日提出) 解答

担当 吉森 明

7 月 3 日訂正しました。訂正した箇所は赤字で示してあります。申し訳ありませんでした。

さらに、7 月 22 日に訂正しました。(15) 式の右辺 2 項目の符号が違いました。青地で示してあります。申し訳ありません。

[問題 1.] ① 理想ボース気体で $D(\epsilon) = D_0 V \epsilon^2 (\epsilon \geq 0)$, $D(\epsilon) = 0 (\epsilon < 0)$ の時、転移点以下の圧力を求めなさい。

② 教科書 P161 演習問題 [4]

[解答] ① (実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)

圧力には、 $\epsilon = 0$ の粒子は寄与しないので、教科書 (10.6) 式から

$$P = -\frac{k_B T}{V} \int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon) \ln(1 - z e^{-\epsilon/k_B T}) d\epsilon \quad (1)$$

与えられている $D(\epsilon)$ を代入すると

$$= -\frac{k_B T}{V} \int_0^{\infty} D_0 V \epsilon^2 \ln(1 - z e^{-\epsilon/k_B T}) d\epsilon \quad (2)$$

$\beta = 1/k_B T$ として、部分積分する。

$$= -\frac{k_B T}{V} D_0 V \left\{ \left[\frac{\epsilon^3}{3} \ln(1 - z e^{-\beta\epsilon}) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^3}{3} \frac{\beta z e^{-\beta\epsilon}}{1 - z e^{-\beta\epsilon}} d\epsilon \right\} \quad (3)$$

$\epsilon = 0$ で、 $\epsilon^3 = 0$ 、 $\epsilon \rightarrow \infty$ で、 $\epsilon^3 \ln(1 - z e^{-\beta\epsilon}) = 0$ だから

$$= \frac{k_B T}{V} D_0 V \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^3}{3} \frac{\beta z e^{-\beta\epsilon}}{1 - z e^{-\beta\epsilon}} d\epsilon = D_0 \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^3}{3} \frac{1}{e^{\beta\epsilon}/z - 1} d\epsilon \quad (4)$$

$\beta\epsilon = x$ とすると

$$= \frac{D_0}{3} (k_B T)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x/z - 1} dx \quad (5)$$

転移温度以下なので $z = 1$

$$= \frac{D_0}{3} (k_B T)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx \quad (6)$$

教科書 P158 の脚注を使うと

$$= \frac{D_0}{3} (k_B T)^4 \frac{\pi^4}{15} \quad (7)$$

② 教科書 P222 で分からなかったら聞きに来て下さい。

[問題 2.] BEC が起きてても圧力に $\epsilon = 0$ の項が寄与しないことを授業と別の方法で示せ。(10.17) と (1.30) を使って圧力を求めよ。(10.18) は使ってはいけない。

[解答] BEC が起きている状況を考えるので、(10.17) で $z = 1$ として、ツェータ関数を使うと

$$E = \frac{3V k_B T}{2} \frac{k_B T}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (8)$$

これは、 $T^{5/2}$ に比例しているので、定積比熱は、

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{15V k_B}{4} \frac{k_B T}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (9)$$

教科書 P9(1.30) から

$$C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{NV} \quad (10)$$

だから、P7 の熱力学第 3 法則と合わせて

$$S = \int_0^T \frac{C_v}{T'} dT' \quad (11)$$

C_v は、 $T^{3/2}$ に比例しているので、

$$= \frac{5V k_B}{2} \frac{k_B T}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (12)$$

ヘルムホルツの自由エネルギーを A とすると、 $A = E - TS$ だから、(8) 式と (12) 式から

$$A = \frac{3V}{2} \frac{k_B T}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) - T \frac{5V}{2} \frac{k_B}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) = -V \frac{k_B T}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (13)$$

P10 の表の 1.1 から、圧力 P は、

$$P = - \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_{NT} = \frac{k_B T}{\lambda_T^3} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \quad (14)$$

一方、教科書 P147(10.10) 式は、[問題 1.] と同様に、

$$P = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^{x/z} - 1} dx - \frac{1}{V} \ln(1 - z) \quad (15)$$

と変形できるが、右辺の 2 項目は、 $\epsilon = 0$ の寄与を表す。1 項目は、 $\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ と教科書 P148(10.12) 式のボース-アインシュタイン積分を使って、

$$\frac{4\pi}{3} \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^{x/z} - 1} dx = \frac{k_B T}{\lambda_T^3} b_{5/2}(z) \quad (16)$$

と書けるから、 $z = 1$ の時 (14) 式と比べれば、(15) 式の右辺第 2 項は 0 になることが分かる。

参考: ランダウ・リフシッツ「統計物理学上」小林秋男他訳(岩波書店) P228