2010 年度統計力学 II 宿題 10 (6 月 24 日出題、7 月 1 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 異核２原子分子１個の分配関数が $Z_1 = Z_G j_{rot} Z_S$ の時、１分子あたりの比熱が $C_V = C_{V,G} + C_{V,rot} + C_{V,S}$ となることを示しなさい。添字の G, rot, S は重心、回転、スピンを表す。

[解答] (実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)

エネルギーと分配関数は次の関係式で結ばれる (統計力学 I 参照: 長岡[*1]P74(3.17) 式、補習ノート[*2]P10(21) 式)。

$$\boxed{E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_1} \tag{1}$$

ここで、$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とした。$Z_1 = Z_G j_{rot} Z_S$ だから

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z_G j_{rot} Z_S) \tag{2}$$

対数の公式から、

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_G - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln j_{rot} - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_S \tag{3}$$

$\epsilon_G \equiv -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_G$、$\epsilon_{\mathrm{rot}} \equiv -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln j_{rot}$、$\epsilon_S \equiv -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_S$ とすると、

$$= \epsilon_G + \epsilon_{\mathrm{rot}} + \epsilon_S \tag{4}$$

これは、エネルギーが 3 つの自由度の寄与の和で書ける事を表している。

一方、比熱は、 (長岡 P57(2.87) 式、補習ノート P9(13) 式)

$$\boxed{C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V} \tag{5}$$

[*1] 岩波基礎物理学シリーズ 7 「統計力学」、長岡洋介 著、岩波書店

[*2] http://www.cmt.phys.kyushu-u.ac.jp/˜A.Yoshimori/hoshu10.pdf

(4) 式を代入すると、

$$= \frac{\partial \epsilon_G}{\partial T} + \frac{\partial \epsilon_{\mathrm{rot}}}{\partial T} + \frac{\partial \epsilon_S}{\partial T} \tag{6}$$

$C_{VG} = \partial\epsilon_G/\partial T$、$C_{V\mathrm{rot}} = \partial\epsilon_{\mathrm{rot}}/\partial T$、$C_{VS} = \partial\epsilon_S/\partial T$ とすれば、答えが示せる。

[問題 2.] 光子にも熱力学が成り立つとすると、光子の数は温度 T と体積 V で決まると、授業中に説明した。具体的に、与えられた T と V に対して、理想ボース気体の統計力学を使って (平均の) 粒子数を求めなさい。

[解答] 前回の宿題 2 のように光子では BEC は起こらないと考える。状態密度を $\tilde{D}(\epsilon)$ として、理想ボース気体の粒子数の公式を使うと、$\epsilon = \hbar\omega = 0$ には粒子はないと思って、

$$N = \int_0^\infty \frac{\tilde{D}(\epsilon)}{\exp[\beta\epsilon] - 1} d\epsilon \tag{7}$$

ただし、化学ポテンシャル μ は 0 とした。ω に変数変換すると、

$$= \int_0^\infty \frac{D(\omega)}{\exp[\beta\hbar\omega] - 1} d\omega \tag{8}$$

$D(\omega) = V\omega^2/(\pi^2 c^3)$ を代入すると

$$= \int_0^\infty \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp[\beta\hbar\omega] - 1} d\omega \tag{9}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{\exp[\beta\hbar\omega] - 1} d\omega \tag{10}$$

$x = \beta\hbar\omega$ に変数変換すると、

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{(k_{\mathrm{B}}T)^2 x^2}{\hbar^2} \frac{1}{\exp[x] - 1} \frac{k_{\mathrm{B}}T dx}{\hbar} \tag{11}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{(k_{\mathrm{B}}T)^3}{\hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{\exp[x] - 1} dx \tag{12}$$