2010年度統計力学II 宿題4 (5月13日出題、5月20日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 相対論的効果が大きい時、$\epsilon_l = c\hbar|\vec{k}(\vec{l})|$ となる。$\vec{k}(\vec{l})$ は前回の授業と同じ意味。c を光速として $D(\epsilon)$ を求め ϵ_F を計算しなさい。また $T=0$ の E を粒子数 N と ϵ_F で表せ。(内部自由度なし)

[解答] この場合も授業で説明したのと同じ様に波数 $\vec{k}(\vec{l})$ で1粒子固有関数は特徴づけられる。したがって、やはり波数空間を考えて、1つのエネルギー固有状態を波数空間の1点に対応させる。

$D(\epsilon)\Delta\epsilon$ は、ϵ から $\epsilon+\Delta\epsilon$ にある準位の数だから、0から ϵ にある準位の数を $N(\epsilon)$ とすると (記号は似ているけれど、粒子数 N との違いに注意)

$$D(\epsilon)\Delta\epsilon = N(\epsilon+\Delta\epsilon) - N(\epsilon) \approx \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon}\Delta\epsilon \tag{1}$$

$N(\epsilon)$ は、授業と同じ様に波数空間の球の中に入っている点の数を数えれば良い。しかし、今回は半径が違って、数えるべき点は $c\hbar|\vec{k}| \le \epsilon$ を満たす点だから、半径は $\epsilon/c\hbar$ となる。この球の体積を点の間隔の3乗で割れば、$N(\epsilon)$ を計算できる。点の間隔は前と同じ $2\pi/L$ だから

$$N(\epsilon) = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\epsilon}{c\hbar}\right)^3\left(\frac{V}{8\pi^3}\right) \tag{2}$$

したがって、

$$D(\epsilon) = \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{4\pi}{(c\hbar)^3}\epsilon^2\left(\frac{V}{8\pi^3}\right) = \frac{V}{2\pi^2(c\hbar)^3}\epsilon^2 \tag{3}$$

ただし、$\epsilon<0$ で $D(\epsilon)=0$ となる。

フェルミエネルギー ϵ_F は、$N = \sum_l \langle n_l \rangle$ から準位が密に詰まっている時、

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \tag{4}$$

$f(\epsilon)$ はフェルミの分布関数を表す。$D(\epsilon)$ が自由粒子に限らず一般的な場合を考えて、積分の加減を $-\infty$ にした。$T=0$ では、$f(\epsilon)$ は階段関数になるので、

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon \tag{5}$$

(3) 式と $\epsilon < 0$ で $D(\epsilon) = 0$ となることを考慮すると、

$$N = \int_{0}^{\epsilon_F} \frac{V}{2\pi^2 (c\hbar)^3} \epsilon^2 d\epsilon \tag{6}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2 (c\hbar)^3} \frac{\epsilon_F^3}{3} \tag{7}$$

ϵ_F について解けば、

$$\epsilon_F = \left\{ 6\pi^2 (c\hbar)^3 \frac{N}{V} \right\}^{1/3} \tag{8}$$

エネルギーも同様に、

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon \tag{9}$$

$f(\epsilon)$ に階段関数を代入して、

$$E = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon \tag{10}$$

$D(\epsilon)$ を代入して、

$$E = \int_{0}^{\epsilon_F} \epsilon \frac{V}{2\pi^2 (c\hbar)^3} \epsilon^2 d\epsilon \tag{11}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2 (c\hbar)^3} \frac{\epsilon_F^4}{4} \tag{12}$$

(7) 式から

$$E = \frac{3}{4} N \epsilon_F \tag{13}$$

[問題 2.] 授業と同じ設定 ($\epsilon_l = \hbar^2|\vec{k}(\vec{l})|^2/2m$ 内部自由度あり:g) で低い準位から順に粒子をつめ、N 個の粒子をつめた時の最大の波数 (絶対値)k_F を求めよ。[*1]

[解答] まず、半径 k_F の球内の状態数を数える。これは授業で説明したのと同じで、内部自由度を考えると、

$$\begin{aligned} \text{状態数} &= \text{半径 } k_F \text{の球の内側にある点の数} \times g &(14)\\ &= g\frac{\text{球の体積}}{(\text{間隔})^2} &(15)\\ &= g\frac{\frac{4\pi}{3}k_F^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} &(16)\end{aligned}$$

$L^3 = V$ だから

$$= g\frac{4\pi}{3}k_F^3\frac{V}{(2\pi)^3} \qquad (17)$$

これが N に等しいので、k_F について解くと

$$k_F = \left(6\pi^2\frac{N}{gV}\right)^{1/3} \qquad (18)$$

k_F は**フェルミ波数**と呼ばれる。

[*1] 条件として $T = 0$ を書き忘れました。お詫びして訂正致します。