6 月 29 日に赤字で訂正しました。申し訳ありません。

2010 年度統計力学 II 宿題 8 (6 月 10 日日出題、6 月 24 日提出延長) 解答

担当 吉森 明

[問題 2.] 数密度 $2 \times 10^{13}\mathrm{cm}^{-3}$ の Rb の T_c を求めよ。

[解答] 1.3×10^{-7} K

2010 年度統計力学 II 宿題 9 (6 月 17 日日出題、6 月 24 日提出) 解答

[問題 1.]

① BEC を起こす理想ボース気体で $D(\epsilon) = D_0 V \epsilon^{1/2} (\epsilon \geq 0)$、$D(\epsilon) = 0 (\epsilon < 0)$ のとき、転移温度以下の圧力が T^n に比例することを示し n を求めよ。

② 光子の状態密度 $D(\omega)$ と E を求めよ。

[解答] ① (実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)

圧力には、$\epsilon = 0$ の粒子は寄与しないので、

$$P = -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V} \int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon) \ln(1 - z e^{-\epsilon/k_{\mathrm{B}}T}) d\epsilon \tag{1}$$

与えられている $D(\epsilon)$ を代入すると

$$= -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V} \int_{0}^{\infty} D_0 V \epsilon^{1/2} \ln(1 - z e^{-\epsilon/k_{\mathrm{B}}T}) d\epsilon \tag{2}$$

$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ として、部分積分する*1。

$$= -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V} D_0 V \left\{ \left[\frac{2\epsilon^{3/2}}{3} \ln(1 - z e^{-\beta\epsilon}) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{2\epsilon^{3/2}}{3} \frac{\beta z e^{-\beta\epsilon}}{1 - z e^{-\beta\epsilon}} d\epsilon \right\} \tag{3}$$

$\epsilon = 0$ で、$\epsilon^{3/2} = 0$、$\epsilon \to \infty$ で、$\epsilon^{3/2} \ln(1 - ze^{-\beta\epsilon}) = 0$ だから

$$= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{V} D_0 V \int_0^\infty \frac{2\epsilon^{3/2}}{3} \frac{\beta z e^{-\beta\epsilon}}{1 - ze^{-\beta\epsilon}} d\epsilon = D_0 \int_0^\infty \frac{2\epsilon^{3/2}}{3} \frac{1}{e^{\beta\epsilon}/z - 1} d\epsilon \tag{4}$$

$\beta\epsilon = x$ とすると

$$= \frac{2D_0}{3} (k_{\mathrm{B}}T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x/z - 1} dx \tag{5}$$

転移温度以下なので $z = 1$

$$= \frac{2D_0}{3} (k_{\mathrm{B}}T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \qquad \propto T^{5/2} \tag{6}$$

つまり、$n = 5/2$

② $D(\omega)$ の計算は、宿題 4 とほぼ同じように計算できる。波数空間を考えるのは他の普通の粒子と同じで、光の状態を波数空間の 1 点に対応させる。ただし、$g = 2$ なので、波数空間の 1 点は g 個の状態と対応している。

0 から ω にある状態の数 $N(\omega)$ は、波数空間の球の中に入っている点の数から得られる。半径 ω/c の体積を点の間隔の 3 乗で割れば、$N(\omega)$ を計算できる。点の間隔は $2\pi/L$ だから

$$N(\omega) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \left(\frac{V}{8\pi^3}\right) \times 2 \tag{7}$$

したがって、

$$D(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{8\pi}{c^3}\omega^2 \left(\frac{V}{8\pi^3}\right) = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 \tag{8}$$

ただし、$\omega < 0$ で $D(\omega) = 0$ となる。

E は、

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} b(\hbar\omega)\hbar\omega D(\omega) d\omega \tag{9}$$

*1 (別解) 部分積分をしなくても正解です。直接変数変換しても構いません。

ここで、$b(\hbar\omega)$ はボース分布に $\epsilon = \hbar\omega$ を入れたもの。$b(\hbar\omega)$ と $D(\omega)$ の具体的な形を代入すると、

$$E = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{\exp[\hbar\omega/k_\mathrm{B}T]-1}\frac{V\omega^2}{\pi^2c^3}d\omega \tag{10}$$

$\hbar\omega/k_\mathrm{B}T = x$ として変数変換すると、

$$= \frac{V(k_\mathrm{B}T)^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{\exp[x]-1} \tag{11}$$

ここで、

$$I = \int_0^\infty \frac{x^3dx}{\exp[x]-1} \tag{12}$$

とおけば、

$$E = \frac{V(k_\mathrm{B}T)^4}{\pi^2c^3\hbar^3}I \tag{13}$$

と答えが求まる。I は、物理量によらない定数で、長岡[*2]P278(A11) 式によれば、$\pi^4/15$ の値になる。

[問題 2.] 光子で BEC は起こるか？理由も述べよ。

[解答] 光子で BEC は起こらないと考える方が自然である。

理由: BEC は、与えられた N と T に対して、z あるいは μ を決めた時に、その T 依存性に特異性が現れる現象と考えることが出来る。つまり、$\epsilon > 0$ の粒子数に制限があるために、与えられた N がその制限を超えた時に、越えた粒子数が $\epsilon = 0$ に凝縮すると言える。

ところが光子の場合は、$\hbar\omega > 0$ の粒子数に制限がある所は同じであるが、授業で説明したように熱力学を適用しようとすると、N は人間が自由に決めることが出来ず、T と V を決めると決まってしまう。どういう風に決まるかは実は任意性があるが、$\hbar\omega > 0$ の粒子数の制限そのものに決まると考えるのがもっとも自然だ。(化学ポテンシャルが μ は光子では常に 0

[*2] 岩波基礎物理学シリーズ 7 「統計力学」、長岡洋介 著、岩波書店

であることに注意しなさい。）そのように考えると、$\epsilon = 0$ に粒子が凝縮する必要がないので、BEC は起こらない。