2011 年度統計力学 II 宿題 4 (5 月 12 日出題、5 月 19 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 相対論効果が大きいとき、$\varepsilon_{\vec{\ell}} = c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})|$ ただし、c は光速、$\vec{k}(\vec{\ell})$ は授業と同じ。$D(\varepsilon)$ を求 め、ε_F を計算しなさい。また $T = 0$ の E と P を ε_F と N と V で表せ。(内部自由度なし)

[解答] この場合も授業で説明したのと同じ様に波数 $\vec{k}(\vec{l})$ で 1 粒子固有関数は特徴づけられる。したがって、やはり波数空間を考えて、1 つのエネルギー固有状態を波数空間の 1 点に対応させる。

$D(\varepsilon)\Delta\varepsilon$ は、ε から $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ にある状態の数だから、0 から ε にある状態の数を $N(\varepsilon)$ とすると (記号は似ているけれど、粒子数 N との違いに注意)

$$D(\varepsilon)\Delta\varepsilon = N(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - N(\varepsilon) \approx \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Delta\varepsilon \tag{1}$$

$N(\varepsilon)$ は、授業と同じ様に波数空間の球の中に入っている点の数を数えれば良い。しかし、今回は半径が違って、数えるべき点は $c\hbar|\vec{k}| \leq \varepsilon$ を満たす点だから、半径は $\varepsilon/c\hbar$ となる。ε が充分大きければ、半径も大きいので、球面近くの点は内部の点に比べ数が小さい。したがって、これらの点を無視できるので、この球の体積を点の間隔の 3 乗で割れば、$N(\varepsilon)$ を計算できる。点の間隔は前と同じ $2\pi/L$ だから

$$N(\varepsilon) = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\varepsilon}{c\hbar}\right)^3\left(\frac{V}{8\pi^3}\right) \tag{2}$$

したがって、

$$D(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{4\pi}{(c\hbar)^3}\varepsilon^2\left(\frac{V}{8\pi^3}\right) = \frac{V}{2\pi^2(c\hbar)^3}\varepsilon^2 \tag{3}$$

ただし、$\varepsilon < 0$ で $D(\varepsilon) = 0$ となる。

フェルミエネルギー ε_F は、$N = \sum_l \langle n_l \rangle$ から状態が密に詰まっている時、

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \tag{4}$$

$f(\varepsilon)$ はフェルミの分布関数を表す。$D(\varepsilon)$ が自由粒子に限らず一般的な場合を考えて、積分の加減を $-\infty$ にした。$T=0$ では、$f(\varepsilon)$ は階段関数になるので、

$$N = \int_{-\infty}^{\varepsilon_F} D(\varepsilon) d\varepsilon \tag{5}$$

(3) 式と $\varepsilon < 0$ で $D(\varepsilon) = 0$ となることを考慮すると、

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{V}{2\pi^2 (c\hbar)^3} \varepsilon^2 d\varepsilon \tag{6}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2 (c\hbar)^3} \frac{\varepsilon_F^3}{3} \tag{7}$$

ε_F について解けば、

$$\varepsilon_F = \left\{ 6\pi^2 (c\hbar)^3 \frac{N}{V} \right\}^{1/3} \tag{8}$$

エネルギーも同様に、

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \tag{9}$$

$f(\varepsilon)$ に階段関数を代入して、

$$E = \int_{-\infty}^{\varepsilon_F} \varepsilon D(\varepsilon) d\varepsilon \tag{10}$$

$D(\varepsilon)$ を代入して、

$$E = \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon \frac{V}{2\pi^2 (c\hbar)^3} \varepsilon^2 d\varepsilon \tag{11}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2 (c\hbar)^3} \frac{\varepsilon_F^4}{4} \tag{12}$$

(7) 式から

$$E = \frac{3}{4} N \varepsilon_F \tag{13}$$

圧力は、以下の公式 (「岩波基礎物理学シリーズ 7 「統計力学」、長岡洋介 著、岩波書店」P54 (2.75) 式、補習ノート P16(67) 式)

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} \tag{14}$$

から計算できる。ただし、S はエントロピーだが、今、$T=0$ なので、第 3 法則から $S=0$ となる。したがって、$T=0$ の時だけ特別に S 一定という条件は満たされる。つまり、

$$P = -\left.\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{3}{4}N\varepsilon_F\right)\right|_{N\ \text{一定}} \tag{15}$$

(8) 式から ε_F は、$V^{-1/3}$ に比例するので、

$$P = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}N\frac{\varepsilon_F}{V}\right) = \frac{1}{4}N\frac{\varepsilon_F}{V} \tag{16}$$

[問題 2.] 授業の自由粒子 (周期的内部自由度 g コ) で $T=0$ のときの最大波数 k_F を求めよ。

[解答] まず、半径 k_F の球内の状態数を数える。これは授業で説明したのと同じで、内部自由度を考えると、

$$\text{状態数} = \text{半径 } k_F \text{の球の内側にある点の数} \times g \tag{17}$$

$$= g\frac{\text{球の体積}}{(\text{間隔})^2} \tag{18}$$

$$= g\frac{\frac{4\pi}{3}k_F^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} \tag{19}$$

$L^3 = V$ だから

$$= g\frac{4\pi}{3}k_F^3\frac{V}{(2\pi)^3} \tag{20}$$

これが N に等しいので、k_F について解くと

$$k_F = \left(6\pi^2\frac{N}{gV}\right)^{1/3} \tag{21}$$

k_F は**フェルミ波数**と呼ばれる。