

2011 年度統計力学 II 宿題 5 (5 月 19 日出題、5 月 26 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 部分積分等、授業で略した部分を補って  $E = \frac{3}{2}PV$  を示せ。

[解答] プリント「授業ノート 1」(15) 式から

$$\Xi = \prod_l \Xi_l = \prod_l (1 + ze^{-\beta\epsilon_l}) \quad (1)$$

統計力学 I プリント「統計アンサンブルのまとめ」(補習ノート<sup>\*1</sup> では  $J$ ) から

$$\Omega = -k_B T \ln \Xi = -k_B T \sum_l \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon_l}) \quad (2)$$

準位が密に詰まっていれば

$$\Omega = -k_B T \int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon) \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \quad (3)$$

$\Omega = -PV$ (補習ノート (100) 式) だから、

$$PV = k_B T \int_{-\infty}^{\infty} D(\epsilon) \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \quad (4)$$

この式に

$$D(\epsilon) = \begin{cases} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{V}{(2\pi)^2} g\epsilon^{1/2} & \epsilon \geq 0 \\ 0 & \epsilon < 0 \end{cases} \quad (5)$$

を代入すると

$$PV = k_B T \int_0^{\infty} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{V}{(2\pi)^2} g\epsilon^{1/2} \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \quad (6)$$

---

<sup>\*1</sup> <http://www.cmt.phys.kyushu-u.ac.jp/~A.Yoshimori/hoshu11.pdf>

これを部分積分する。

$$PV = k_B T \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{V}{(2\pi)^2} g \left\{ \left[ \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \ln(1 + z e^{-\beta \varepsilon}) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \frac{z(-\beta) e^{-\beta \varepsilon}}{(1 + z e^{-\beta \varepsilon})} d\varepsilon \right\} \quad (7)$$

$[\dots]$  は、 $\varepsilon = 0$  で、 $\varepsilon^{3/2}$  のために 0、 $\varepsilon \rightarrow \infty$  は、 $e^{-\beta \varepsilon} \rightarrow 0$  で 0 になる。

$$PV = k_B T \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{V}{(2\pi)^2} g \beta \int_0^\infty \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} + 1} d\varepsilon \quad (8)$$

$\beta = 1/(k_B T)$  だから

$$= \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{V}{(2\pi)^2} g \int_0^\infty \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} + 1} d\varepsilon \quad (9)$$

一方、エネルギー  $E$  は、 $f(\varepsilon_l)$  をフェルミ分布関数とすると、

$$E = \sum_l \varepsilon_l f(\varepsilon_l) \quad (10)$$

$$= \int_{-\infty}^\infty D(\varepsilon) \frac{\varepsilon}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} + 1} d\varepsilon \quad (11)$$

(5) 式を代入して

$$= \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{V}{(2\pi)^2} g \int_0^\infty \frac{\varepsilon \varepsilon^{1/2}}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} + 1} d\varepsilon \quad (12)$$

$$= \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{V}{(2\pi)^2} g \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{z^{-1} e^{\beta \varepsilon} + 1} d\varepsilon \quad (13)$$

(9) 式と (13) 式を比べれば、 $E = (3/2)PV$  が示せる。

[問題 2.]  $T$  を含まない  $X(\varepsilon)$  について  $\int_0^\infty X(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$  を  $T^2$  までテーラー展開しなさい。 $f(\varepsilon)$  はフェルミ分布関数。

[解答] まず、

$$\tilde{X}(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon X(\varepsilon') d\varepsilon' \quad (14)$$

とおくと、

$$X(\varepsilon) = \frac{d\tilde{X}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad (15)$$

であり、与式を部分積分すると、

$$\int_0^\infty X(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{d\tilde{X}(\varepsilon)}{d\varepsilon} f(\varepsilon)d\varepsilon \quad (16)$$

$$= \left[ \tilde{X}(\varepsilon)f(\varepsilon) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \tilde{X}(\varepsilon) \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon \quad (17)$$

$\tilde{X}(0) = 0$ 、 $f(\infty) = 0$  だから

$$= - \int_0^\infty \tilde{X}(\varepsilon) \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon \quad (18)$$

$-df(\varepsilon)/d\varepsilon$  を計算すると、

$$-\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{1}{k_B T} \frac{1}{(\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T] + 1)(\exp[-(\varepsilon - \mu)/k_B T] + 1)} \quad (19)$$

この関数は  $\varepsilon = \mu$  のまわりに  $k_B T$  程度の幅のピークを持つ。したがって、 $\tilde{X}(\varepsilon)$  を  $\varepsilon = \mu$  のまわりで展開するのは、 $T$  で展開するのと同じだから、2次まで展開すると、

$$\tilde{X}(\varepsilon) = \tilde{X}(\mu) + (\varepsilon - \mu) \left. \frac{d\tilde{X}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu} + \frac{(\varepsilon - \mu)^2}{2} \left. \frac{d^2\tilde{X}(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=\mu} \quad (20)$$

これを (18) 式に代入

$$- \int_0^\infty \tilde{X}(\varepsilon) \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon = - \int_0^\infty \left( \tilde{X}(\mu) + (\varepsilon - \mu) \left. \frac{d\tilde{X}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\mu} + \frac{(\varepsilon - \mu)^2}{2} \left. \frac{d^2\tilde{X}(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=\mu} \right) \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon \quad (21)$$

1 項目は、

$$-\int_0^{\infty} \tilde{X}(\mu) \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon = -\tilde{X}(\mu) \int_0^{\infty} \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon \quad (22)$$

$-df(\varepsilon)/d\varepsilon$  は、鋭いピークの関数だから、下限を  $-\infty$  にして、

$$= -\tilde{X}(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon \quad (23)$$

$$= \tilde{X}(\mu) \quad (24)$$

2 項目は、 $-df(\varepsilon)/d\varepsilon$  が  $\varepsilon = \mu$  の軸に対して対称なので、0 になる。3 項目は、

$$-\int_0^{\infty} \frac{(\varepsilon - \mu)^2}{2} \frac{d^2 \tilde{X}(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=\mu} \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon \quad (25)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d^2 \tilde{X}(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=\mu} \int_0^{\infty} (\varepsilon - \mu)^2 \frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon \quad (26)$$

$-df(\varepsilon)/d\varepsilon$  に (19) 式を代入し、積分の下限を  $-\infty$  にして、公式 (例えば、岩波基礎物理学シリーズ 7 「統計力学」、長岡洋介 著、岩波書店 P278(A.10)) を使えば、

$$= \frac{1}{2} \frac{d^2 \tilde{X}(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=\mu} \frac{\pi^2}{3} (k_B T)^2 \quad (27)$$

$\tilde{X}(\varepsilon)$  の定義を与える (14) 式から、

$$= \frac{1}{2} \frac{dX(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\mu} \frac{\pi^2}{3} (k_B T)^2 \quad (28)$$

結局

$$\int_0^{\infty} X(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \tilde{X}(\mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{dX(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\mu} \quad (29)$$