

2011 年度統計力学 II 宿題 7 (6 月 2 日出題、6 月 9 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 相対論的効果が大きいとき ($\varepsilon_{\vec{\ell}} = c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})|$)、授業で説明したのと同じように $N = \sum_{\vec{\ell}} b(\varepsilon_{\vec{\ell}})$ が積分できるか調べよ。

[解答] 授業で取り上げた

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} \ll \frac{N}{V} \quad (1)$$

が全ての $\vec{\ell}$ について成り立つか、 N/V を一定にして、 $N \rightarrow \infty$ 、 $V \rightarrow \infty$ の極限で調べる。ここで、 N と V は全粒子数と体積を表す。

$b(\varepsilon_{\vec{\ell}})$ の式を代入すると、

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} = \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}/z} - 1} \quad (2)$$

$z < 1$ だから

$$< \frac{1}{V} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}} - 1} \quad (3)$$

$V = L^3$ だから $V \rightarrow \infty$ は $L \rightarrow \infty$ と同じだから、 $L \rightarrow \infty$ とすると、 $|\vec{k}|$ は小さくなり、 $\varepsilon_{\vec{\ell}}$ も小さくなる。指数関数をテーラー展開すると、

$$\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \frac{1}{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}} \quad (4)$$

$V = L^3$ と問題の $\varepsilon_{\vec{\ell}}$ を代入すると、

$$= \frac{1}{L^3} \frac{1}{\beta} \left\{ c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})| \right\}^{-1} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{L^3} \frac{1}{\beta} \left\{ c\hbar \frac{2\pi|\vec{\ell}|}{L} \right\}^{-1} \quad (6)$$

$$\propto \frac{1}{L^2} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 \quad (7)$$

つまり、 N/V を一定にして、 $L \rightarrow \infty$ にすると、

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} \rightarrow 0 \quad (8)$$

ただし、 $\vec{\ell} = 0$ は除く。結局この極限では、 $\varepsilon_{\vec{\ell}} > 0$ で (1) 式が満たされることが分る。

[問題 2.] 2次元平面に閉じ込められたボース粒子の BEC はどうなるか？

ただし、

$$D(\varepsilon) = \begin{cases} D_0(\text{定数}), & \varepsilon > 0 \\ 0, & \varepsilon \leq 0 \end{cases} \text{ を使ってよい。}$$

[解答] 授業で説明した様に、与えられた粒子数 N と温度 T のもとで、絶対活動度 z は、

$$B(z) \equiv \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\varepsilon)}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} d\varepsilon + \frac{1}{N} \frac{z}{1-z} = 1 \quad (9)$$

を解くことで得られる。ここで、 $\beta = 1/(k_B T)$ を表す。 $z/(1-z)$ は、 $z \rightarrow 1$ で発散するのは今までと同じ。

3次元と違うのは、 $B(z)$ の第1項についてで、問題で与えられている状態密度を代入すると、

$$\frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\varepsilon)}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} d\varepsilon = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} \frac{D_0 d\varepsilon}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} \quad (10)$$

この積分は $z \rightarrow 1$ で発散する。なぜなら、積分の下限に注目すると、 ε は充分小さいから $\exp[\beta\varepsilon] = 1 + \beta\varepsilon + \dots$ で、 $(\exp[\beta\varepsilon] - 1) \sim \beta\varepsilon$ となり、被積分関数は、 ε^{-1} に比例する。このような被積分関数を 0 から積分すると対数で発散することが知られている。

3次元の場合は、 z が 1 から充分離れていれば、第2項は $1/N$ に比例するので、充分小さくなり無視できる。しかし、 z が 1 に近づいてくると、第2項は発散するので無視できなくなる。これがボース-アインシュタイン凝縮。

ところが、2次元の場合は、第1項も $z \rightarrow 1$ で発散するので、すべての z の値で第2項より第1項が大きくなり、常に第2項を無視できる。したがって、ボース-アインシュタイン凝縮は起こらない。