2011 年度統計力学 II 宿題 8 (6 月 9 日出題、6 月 16 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $\varepsilon > 0, D(\varepsilon) = D_0 V \varepsilon^{\frac{1}{2}}$($V$ は体積)
$\varepsilon > 0, D(\varepsilon) = 0$ の時、$T_c$ が $D_0^{-\frac{2}{3}}$ に比例することと、$T < T_c$ で $B_1(1) < 1$ となることを示せ。また、$T < T_c$ のとき $\varepsilon > 0$ の粒子数 $N_e$ と $\varepsilon = 0$ の粒子数 $N_0$ を全粒子数 $N$ と $T$,$T_c$ で表せ。

[解答] $T_c$ は

$$B_1(1) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\epsilon) \frac{D(\epsilon)}{N} d\epsilon = 1 \tag{1}$$

の条件を満たす温度として定義されている。ここで、$b(\epsilon)$ はボース分布を表し、ただし、$z = 1$、$T = T_c$、つまり

$$b(\epsilon) = \frac{1}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}} T_c] - 1} \tag{2}$$

問題で与えられている $D(\epsilon)$ を代入すると、

$$\int_0^{\infty} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}} T_c] - 1} \frac{D_0 V \epsilon^{1/2}}{N} = 1 \tag{3}$$

$\epsilon/k_{\mathrm{B}} T_c = x$ として変数変換する。$dx = d\epsilon/k_{\mathrm{B}} T_c$ だから、

$$\int_0^{\infty} \frac{k_{\mathrm{B}} T_c dx}{\exp[x] - 1} \frac{D_0 V (k_{\mathrm{B}} T_c x)^{1/2}}{N} = 1 \tag{4}$$

$k_{\mathrm{B}} T_c$ をくくりだすと、

$$(k_{\mathrm{B}} T_c)^{3/2} D_0 \frac{V}{N} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} = 1 \tag{5}$$

したがって、$T_c$ について解くと、

$$T_c = k_{\mathrm{B}}^{-1} \left\{ D_0 \frac{V}{N} I \right\}^{-2/3} \tag{6}$$

ここで、

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} \tag{7}$$

とした。$I$ は $V$ にも $N$ にも依らない定数を表す。

$T \neq T_c$ の時は、

$$B_1(1) = (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} D_0 \frac{V}{N} I = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{8}$$

だから、$T < T_c$ の時は、$B_1(1) = (T/T_c)^{3/2} < 1$ が成り立つ。それゆえ、$T < T_c$ で BEC が起こると言える。

粒子数 $N$ は温度 $T$ と化学ポテンシャル $\mu$ で表すと、

$$N = \int D(\epsilon) \frac{d\epsilon}{\exp[(\epsilon - \mu)/k_{\mathrm{B}}T] - 1} + N_0 \tag{9}$$

$T < T_c$ では、$\mu = 0$ だから

$$N = \int D(\epsilon) \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T] - 1} + N_0 \tag{10}$$

$D(\epsilon)$ に与えられた式を代入すると

$$N = \int D_0 V \epsilon^{1/2} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T] - 1} + N_0 \tag{11}$$

右辺の 1 項目が $\epsilon > 0$ の粒子数、つまり $N_e$、2 項目が $\epsilon = 0$ の粒子数だから、

$$N_e = \int D_0 V \epsilon^{1/2} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T] - 1} \tag{12}$$

$$N_0 = N - \int D_0 V \epsilon^{1/2} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T] - 1} \tag{13}$$

(12) 式と (13) 式に対して (4) 式と、同様の変数変換をすると、

$$N_e = D_0 V (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} \int \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} \tag{14}$$

$$N_0 = N - D_0 V (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} \int \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} \tag{15}$$

(6) 式を使うと、

$$N_e = N (k_{\mathrm{B}}T_c)^{-3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} = N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{16}$$

$$N_0 = N - N (k_{\mathrm{B}}T_c)^{-3/2} (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} = N - N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{17}$$

[問題 2.] 数密度 $2 \times 10^{13} cm^{-3}$ の Rb の $T_c$ を求めよ。

[解答] $1.3 \times 10^{-7}$ K