2011 年度統計力学 II 宿題 9 (6 月 16 日出題、6 月 23 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] ①BEC をおこす理想ボース気体で $D(\varepsilon)=D_0V\varepsilon^{\frac{1}{2}}(\varepsilon\geq 0), D(\varepsilon)=0(\varepsilon<0)$ の時、$T<T_c$ の圧力が T^n に比例することを示し、n を求めよ。
②光子の状態密度 $D(\omega)$ とエネルギー E を求めよ。

[解答] ① (実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)
　圧力には、$\varepsilon=0$ の粒子は寄与しないので、

$$P=-\frac{k_\mathrm{B}T}{V}\int_{-\infty}^{\infty}D(\varepsilon)\ln(1-ze^{-\varepsilon/k_\mathrm{B}T})d\varepsilon \tag{1}$$

与えられている $D(\varepsilon)$ を代入すると

$$=-\frac{k_\mathrm{B}T}{V}\int_0^{\infty}D_0V\varepsilon^{1/2}\ln(1-ze^{-\varepsilon/k_\mathrm{B}T})d\varepsilon \tag{2}$$

$\beta=1/k_\mathrm{B}T$ として、部分積分する[*1]。

$$=-\frac{k_\mathrm{B}T}{V}D_0V\left\{\left[\frac{2\varepsilon^{3/2}}{3}\ln(1-ze^{-\beta\varepsilon})\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\frac{2\varepsilon^{3/2}}{3}\frac{\beta ze^{-\beta\varepsilon}}{1-ze^{-\beta\varepsilon}}d\varepsilon\right\} \tag{3}$$

$\varepsilon=0$ で、$\varepsilon^{3/2}=0$、$\varepsilon\to\infty$ で、$\varepsilon^{3/2}\ln(1-ze^{-\beta\varepsilon})=0$ だから

$$=\frac{k_\mathrm{B}T}{V}D_0V\int_0^{\infty}\frac{2\varepsilon^{3/2}}{3}\frac{\beta ze^{-\beta\varepsilon}}{1-ze^{-\beta\varepsilon}}d\varepsilon=D_0\int_0^{\infty}\frac{2\varepsilon^{3/2}}{3}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon}/z-1}d\varepsilon \tag{4}$$

$\beta\varepsilon=x$ とすると

$$=\frac{2D_0}{3}(k_\mathrm{B}T)^{5/2}\int_0^{\infty}\frac{x^{3/2}}{e^x/z-1}dx \tag{5}$$

転移温度以下なので $z=1$

$$=\frac{2D_0}{3}(k_\mathrm{B}T)^{5/2}\int_0^{\infty}\frac{x^{3/2}}{e^x-1}dx\qquad\propto T^{5/2} \tag{6}$$

つまり、$n=5/2$

[*1] (別解) 部分積分をしなくても正解です。直接変数変換しても構いません。

② $D(\omega)$ の計算は、宿題 4 とほぼ同じように計算できる。波数空間を考えるのは他の普通の粒子と同じで、光の状態を波数空間の 1 点に対応させる。ただし、$g=2$ なので、波数空間の 1 点は g 個の状態と対応している。

0 から ω にある状態の数 $N(\omega)$ は、波数空間の球の中に入っている点の数から得られる。半径 ω/c の体積を点の間隔の 3 乗で割れば、$N(\omega)$ を計算できる。点の間隔は $2\pi/L$ だから

$$N(\omega)=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3\left(\frac{V}{8\pi^3}\right)\times 2 \tag{7}$$

したがって、

$$D(\omega)=\frac{dN(\omega)}{d\omega}=\frac{8\pi}{c^3}\omega^2\left(\frac{V}{8\pi^3}\right)=\frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2 \tag{8}$$

ただし、$\omega<0$ で $D(\omega)=0$ となる。

E は、

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}b(\hbar\omega)\hbar\omega D(\omega)d\omega \tag{9}$$

ここで、$b(\hbar\omega)$ はボース分布に $\varepsilon=\hbar\omega$ を入れたもの。$b(\hbar\omega)$ と $D(\omega)$ の具体的な形を代入すると、

$$E=\int_0^{\infty}\frac{\hbar\omega}{\exp[\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T]-1}\frac{V\omega^2}{\pi^2c^3}d\omega \tag{10}$$

$\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T=x$ として変数変換すると、

$$=\frac{V(k_{\mathrm{B}}T)^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{\exp[x]-1} \tag{11}$$

ここで、

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{\exp[x]-1} \tag{12}$$

とおけば、

$$E=\frac{V(k_{\mathrm{B}}T)^4}{\pi^2c^3\hbar^3}I \tag{13}$$

と答えが求まる。I は、物理量によらない定数で、長岡[*2]P278(A11) 式によれば、$\pi^4/15$ の値になる。

[*2] 岩波基礎物理学シリーズ 7 「統計力学」、長岡洋介 著、岩波書店

[問題 2.] $T < T_c$ で、圧力に $\varepsilon = 0$ の項が寄与しないことを [問題 1.] の①の $D(\varepsilon)$ で授業と別の方法で示せ。エネルギーの温度依存性と比熱の式から圧力を求めよ。

[解答] BEC が起きている状況を考えるので、$z = 1$ として、計算すると、

$$E = CVT^{5/2} \tag{14}$$

ここで、

$$C = D_0 k_{\mathrm{B}} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \tag{15}$$

定積比熱は、定義から

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{5CV}{2} T^{3/2} \tag{16}$$

　熱力学の関係式から

$$C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{NV} \tag{17}$$

だから、熱力学第 3 法則と合せて

$$S = \int_0^T \frac{C_v}{T'} dT' \tag{18}$$

C_v は、$T^{3/2}$ に比例しているので、

$$= \frac{5}{3} CVT^{3/2} \tag{19}$$

　ヘルムホルツの自由エネルギーを A とすると、$A = E - TS$ だから、(14) 式と (19) 式から

$$A = CVT^{5/2} - T\frac{5}{3}CVT^{3/2} = -\frac{2}{3}CVT^{5/2} \tag{20}$$

圧力 P は、

$$P = -\left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_{NT} = \frac{2}{3} CT^{5/2} \tag{21}$$

一方、グランドカノニカル分布から直接圧力を計算すると、[問題 1.] と同様に、

$$P = \frac{2D_0}{3}(k_{\mathrm{B}}T)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1}dx - \frac{1}{V}\ln(1-z) \tag{22}$$

と変形できるが、右辺の 2 項目は、$\epsilon = 0$ の寄与を表す。1 項目は、(15) 式から

$$\frac{2D_0}{3}(k_{\mathrm{B}}T)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1}dx = \frac{2}{3}CT^{5/2} \tag{23}$$

と書けるから、(21) 式と比べれば、(22) 式の右辺第 2 項は 0 になることが分かる。

参考: ランダウ・リフシッツ「統計物理学上」小林秋男他訳（岩波書店）P228