2012 年度統計力学 II 宿題 10 (6 月 21 日出題、6 月 28 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 周期境界条件で光子の状態密度 $D(\omega)$ とエネルギー E を求めよ。

[解答] (実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)

$D(\omega)$ の計算は、宿題 4 とほぼ同じように計算できる。波数空間を考えるのは他の普通の粒子と同じで、光の状態を波数空間の 1 点に対応させる。ただし、$g = 2$ なので、波数空間の 1 点は 2 個の状態と対応している。

0 から ω にある状態の数 $N(\omega)$ は、波数空間の球の中に入っている点の数から得られる。半径 ω/c の体積を点の間隔の 3 乗で割れば、$N(\omega)$ を計算できる。点の間隔は $2\pi/L$ だから

$$N(\omega) = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3\left(\frac{V}{8\pi^3}\right)\times 2 \tag{1}$$

したがって、

$$D(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{8\pi}{c^3}\omega^2\left(\frac{V}{8\pi^3}\right) = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 \tag{2}$$

ただし、$\omega < 0$ で $D(\omega) = 0$ となる。

E は、

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} b(\hbar\omega)\hbar\omega D(\omega)d\omega \tag{3}$$

ここで、$b(\hbar\omega)$ はボース分布に $\varepsilon = \hbar\omega$ を入れたもの。$b(\hbar\omega)$ と $D(\omega)$ の具体的な形を代入すると、

$$E = \int_0^{\infty} \frac{\hbar\omega}{\exp[\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T] - 1}\frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}d\omega \tag{4}$$

$\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T = x$ として変数変換すると、

$$= \frac{V(k_{\mathrm{B}}T)^4}{\pi^2 c^3\hbar^3}\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{\exp[x]-1} \tag{5}$$

ここで、

$$I = \int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{\exp[x]-1} \tag{6}$$

とおけば、

$$E = \frac{V(k_{\mathrm{B}}T)^4}{\pi^2 c^3\hbar^3}I \tag{7}$$

と答えが求まる。I は、物理量によらない定数で、長岡[*1]P278(A11) 式によれば、$\pi^4/15$ の値になる。

[問題 2.] フォノンや光子の化学ポテンシャルが 0 であることを熱力学の自由エネルギー最小の原理 (長岡 P83) から導け。

[解答] 光子は、箱に入れていても粒子数を制御できない。つまり与えられた温度と体積で平衡状態の粒子数が決まる。しかし何らかの方法で、粒子数を制限できたとして[*2] 、その制限をはずすと、平衡でない粒子数から平衡状態の粒子数へゆっくり変化すると考える。その時、粒子数以外の自由度は平衡になっていると考えられ、系は部分平衡 (長岡 P24) と仮定する。この部分平衡を定めるパラメータは粒子数 N なので、その関数として自由エネルギー $F = F(N)$ を考える。平衡の N では、この F が最小なので、

$$\frac{dF}{dN} = 0 \tag{8}$$

ここで、微分は体積と温度一定で行う。その時、左辺は化学ポテンシャルになるので、(8) 式は化学ポテンシャルが 0 になることを表している。

[*1] 岩波基礎物理学シリーズ 7 「統計力学」、長岡洋介 著、岩波書店
[*2] このような制限が可能かどうか分からないので、この議論には不安が残る。