2012 年度統計力学 II 宿題 6 (5 月 24 日出題、5 月 31 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] ①$\mu = \varepsilon_F + C_1 T + C_2 T$ としたとき、
$C_1 = 0$、$C_2 = -\frac{\pi^2}{6}\frac{k_B^2}{D(\varepsilon_F)}\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\varepsilon_F}$ を授業で省いた計算を補って示せ。
さらに、$E = G(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 D(\varepsilon_F)$ となることを示せ。
② 5/10 の宿題でエネルギーと圧力を求めよ

[解答]① 次の公式

$$\int_0^\infty X(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \widetilde{X}(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2 \left.\frac{dX(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\mu} \tag{1}$$

を使う。この公式は、T^3 まで正しい。ただし、$X(\varepsilon)$ は T を含まない任意関数で

$$\widetilde{X}(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon X(\varepsilon')d\varepsilon' \tag{2}$$

また、$f(\varepsilon)$ はフェルミの分布関数を表す。

最初は、$N = \int_0^\infty D(\varepsilon)f(\varepsilon)$ を T で展開する。公式で $X(\varepsilon) = D(\varepsilon)$、

$$\widetilde{X}(\mu) = N(\mu) \equiv \int_0^\mu D(\varepsilon')d\varepsilon' \tag{3}$$

とすると、

$$\int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = N(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\mu} \tag{4}$$

次に μ を T で展開する。$\mu = \varepsilon_F + C_1 T + C_2 T^2$ として、

$$N = N(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\,=\,\mu} \tag{5}$$

に代入して、T のベキの係数を計算する。

右辺1項目は、

$$N(\varepsilon_F + C_1 T + C_2 T^2) = N(\varepsilon_F) + (C_1 T + C_2 T^2) \left.\frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\,=\,\varepsilon_F} + \frac{(C_1 T + C_2 T^2)^2}{2} \left.\frac{d^2 N(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon\,=\,\varepsilon_F} \tag{6}$$

2項目は、T^2 までで

$$\frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\,=\,\mu} = \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\,=\,\varepsilon_F} \tag{7}$$

2つを合わせると、

$$N = N(\varepsilon_F) + (C_1 T + C_2 T^2) \left.\frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\,=\,\varepsilon_F} + \frac{(C_1 T + C_2 T^2)^2}{2} \left.\frac{d^2 N(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon\,=\,\varepsilon_F} + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\,=\,\varepsilon_F} \tag{8}$$

この式は恒等式だから T のベキの係数を0において、C_1、C_2 を計算する。T の係数から

$$C_1 \left.\frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\,=\,\varepsilon_F} = 0 \tag{9}$$

ゆえに $C_1 = 0$

T^2 の係数から

$$C_2 \left.\frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\,=\,\varepsilon_F} + \frac{\pi^2}{6}k_{\mathrm{B}}^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\,=\,\varepsilon_F} = 0 \tag{10}$$

ただし、$C_1 = 0$ を使った。C_2 について解くと、

$$C_2 = -\frac{\pi^2}{6}\frac{k_{\mathrm{B}}^2}{D(\varepsilon_F)} \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\,=\,\varepsilon_F} \tag{11}$$

エネルギーに付いては、$E = \int_0^\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon)$ を T で展開する。公式で $X(\varepsilon) = \varepsilon D(\varepsilon)$、

$$\widetilde{X}(\mu) = G(\mu) \equiv \int_0^\mu \varepsilon' D(\varepsilon') d\varepsilon' \tag{12}$$

とすると、

$$\int_0^\infty \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = G(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \left.\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \mu} \tag{13}$$

(13) 式は、T のベキの係数が μ で表されているが、問題の式は ϵ_F なので、$\mu = \varepsilon_F + C_2 T^2$ を代入して μ を消去する。C_2 は (11) 式から ϵ_F で表される。ϵ_F は N で表されるので、T の係数のベキを ϵ_F を使って表すと、N で表すことになる。

$$E = G(\varepsilon_F + C_2 T^2) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \left.\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F + C_2 T^2} \tag{14}$$

右辺 1 項目は、

$$G(\varepsilon_F + C_2 T^2) = G(\varepsilon_F) + C_2 T^2 \left.\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \tag{15}$$

2 項目は、T^2 までで

$$\frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \left.\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F + C_2 T^2} = \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \left.\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \tag{16}$$

あわせて、

$$E = G(\varepsilon_F) + C_2 T^2 \left.\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \left.\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \tag{17}$$

さらに計算を進めると、(12) 式から

$$\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \varepsilon D(\varepsilon) \tag{18}$$

また、(11) 式を代入すると、

$$C_2 T^2 \left.\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} = -\frac{\pi^2}{6}\frac{k_{\mathrm{B}}^2}{D(\varepsilon_F)} \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} T^2 \left.\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \tag{19}$$

(18) 式を代入すると、

$$= -\frac{\pi^2}{6}\frac{k_{\mathrm{B}}^2}{D(\varepsilon_F)} \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} T^2 \varepsilon_F D(\varepsilon_F) \tag{20}$$

$D(\varepsilon_F)$ が分母分子にあるから、

$$= -\frac{\pi^2}{6} k_{\mathrm{B}}^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} T^2 \varepsilon_F \tag{21}$$

一方、

$$\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} = D(\varepsilon) + \varepsilon\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \tag{22}$$

だから、(17) 式の 3 項目は、

$$\begin{aligned} &\frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \left.\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \\ &\qquad = \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2\, \varepsilon \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \end{aligned} \tag{23}$$

全部足すと、

$$\begin{aligned} E = G(\varepsilon_F) &- \frac{\pi^2}{6} k_{\mathrm{B}}^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} T^2 \varepsilon_F \\ &+ \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2\, \varepsilon_F \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \end{aligned} \tag{24}$$

2 項目と 4 項目がキャンセルして

$$E = G(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 D(\varepsilon_F) \tag{25}$$

② エネルギーは、

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon D(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon \tag{26}$$

と書けるから、$f(\varepsilon)$ に階段関数を代入して、

$$E=\int_{-\infty}^{\varepsilon_F}\varepsilon D(\varepsilon)d\varepsilon \tag{27}$$

$D(\varepsilon)$ を代入して、

$$E=\int_{0}^{\varepsilon_F}\varepsilon\frac{V}{2\pi^2(c\hbar)^3}\varepsilon^2 d\varepsilon \tag{28}$$

$$=\frac{V}{2\pi^2(c\hbar)^3}\frac{\varepsilon_F^4}{4} \tag{29}$$

一方、以前計算した式

$$N=\int_{0}^{\varepsilon_F}\frac{V}{2\pi^2(c\hbar)^3}\varepsilon^2 d\varepsilon \tag{30}$$

$$=\frac{V}{2\pi^2(c\hbar)^3}\frac{\varepsilon_F^3}{3} \tag{31}$$

から

$$E=\frac{3}{4}N\varepsilon_F \tag{32}$$

圧力は、以下の公式 (「岩波基礎物理学シリーズ 7 「統計力学」、長岡洋介 著、岩波書店」P54 (2.75) 式、補習ノート P16(68) 式)

$$P=-\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} \tag{33}$$

から計算できる。ただし、S はエントロピーだが、今、$T=0$ なので、第 3 法則から $S=0$ となる。したがって、$T=0$ の時だけ特別に S 一定という条件は満たされる。つまり、

$$P=-\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{3}{4}N\varepsilon_F\right)\bigg|_{N\ \text{一定}} \tag{34}$$

以前導いた

$$\varepsilon_F = \left\{6\pi^2(c\hbar)^3\frac{N}{V}\right\}^{1/3} \tag{35}$$

から ε_F は、$V^{-1/3}$ に比例するので、

$$P = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}N\frac{\varepsilon_F}{V}\right) = \frac{1}{4}N\frac{\varepsilon_F}{V} \tag{36}$$

[問題 2.] 教科書 (長岡)P226 演習問題 3 のフェルミ温度を求めよ。

[解答] 略 (教科書 P298 の解答参照)