2012 年度統計力学 II 宿題 7 (5 月 31 日出題、6 月 7 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 相対論的効果が大きいとき ($\varepsilon_{\vec{\ell}} = c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})|$)、授業で説明したのと同じように $N = \sum_{\vec{\ell}} b(\varepsilon_{\vec{\ell}})$ が積分できるか調べよ。

[解答] 授業で取り上げた

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} << \frac{N}{V} \tag{1}$$

が全ての $\vec{\ell}$ について成り立つか、N/V を一定にして、$N \to \infty$、$V \to \infty$ の極限で調べる。ここで、N と V は全粒子数と体積を表す。

$b(\varepsilon_{\vec{\ell}})$ の式を代入すると、

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} = \frac{1}{V}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}}/z - 1} \tag{2}$$

$z < 1$ だから

$$< \frac{1}{V}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}} - 1} \tag{3}$$

$V = L^3$ だから $V \to \infty$ は $L \to \infty$ と同じだから、$L \to \infty$ とすると、$|\vec{k}|$ は小さくなり、$\varepsilon_{\vec{\ell}}$ も小さくなる。指数関数をテーラー展開すると、

$$\xrightarrow{L\to\infty} \frac{1}{V}\frac{1}{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}} \tag{4}$$

$V = L^3$ と問題の $\varepsilon_{\vec{\ell}}$ を代入すると、

$$= \frac{1}{L^3}\frac{1}{\beta}\left\{c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})|\right\}^{-1} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{L^3}\frac{1}{\beta}\left\{c\hbar\frac{2\pi|\vec{\ell}|}{L}\right\}^{-1} \tag{6}$$

$$\propto \frac{1}{L^2} \xrightarrow{L\to\infty} 0 \tag{7}$$

つまり、N/V を一定にして、$L \to \infty$ にすると、

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} \to 0 \tag{8}$$

ただし、$\vec{\ell} = 0$ は除く。結局この極限では、$\varepsilon_{\vec{\ell}} > 0$ で (1) 式が満たされることが分る。

[問題 2.] プリント「授業ノート 1」の (27) 式から (28) 式を導く条件から μ と最低準位 ε_0 の関係を示せ。

[解答] 「授業ノート 1」でやったように、大分配関数は、$\Xi = \prod_l \Xi_l$ のように書ける。Ξ_l は、ボース粒子の場合、プリントの (16) 式

$$\Xi_l = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z e^{-\beta \varepsilon_l} \right)^n \tag{9}$$

で表せる。これは、無限等比級数で、収束するためには、

$$z e^{-\beta \varepsilon_l} < 1 \tag{10}$$

$z = \exp[\beta\mu]$ だから、$\beta > 0$ を使って、

$$\mu - \varepsilon_l < 0 \tag{11}$$

これはすべてのエネルギー準位 ε_l で、成り立たなければならない。

もし、箱に入った自由粒子のようにエネルギー準位に最小がある時は、その値を ε_0 とすると、

$$\mu < \varepsilon_0 \tag{12}$$

であれば、$\varepsilon_0 \le \varepsilon_l$ だから、全てのエネルギー準位で、(11) 式を満たす。