2012 年度統計力学 II 宿題 8 (6 月 7 日出題、6 月 14 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $\varepsilon > 0, D(\varepsilon) = D_0 V \varepsilon^{\frac{1}{2}}$($V$ は体積)
$\varepsilon \leq 0, D(\varepsilon) = 0$ で、$x = \beta\epsilon$ と変数変換して T_c が $D_0^{-\frac{2}{3}}$ に比例することと、$T < T_c$ で $B_1(1) < 1$ となることを示せ。また、$T < T_c$ のとき $\varepsilon > 0$ の粒子数 N_e と $\varepsilon = 0$ の粒子数 N_0 を全粒子数 N と T,T_c で表せ。

[解答] T_c は

$$B_1(1) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\epsilon) \frac{D(\epsilon)}{N} d\epsilon = 1 \tag{1}$$

の条件を満たす温度として定義されている。ここで、$b(\epsilon)$ はボース分布を表し、ただし、$z = 1$、$T = T_c$、つまり

$$b(\epsilon) = \frac{1}{\exp[\epsilon / k_{\mathrm{B}} T_c] - 1} \tag{2}$$

問題で与えられている $D(\epsilon)$ を代入すると、

$$\int_0^{\infty} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon / k_{\mathrm{B}} T_c] - 1} \frac{D_0 V \epsilon^{1/2}}{N} = 1 \tag{3}$$

$\epsilon / k_{\mathrm{B}} T_c = x$ として変数変換する。$dx = d\epsilon / k_{\mathrm{B}} T_c$ だから、

$$\int_0^{\infty} \frac{k_{\mathrm{B}} T_c dx}{\exp[x] - 1} \frac{D_0 V (k_{\mathrm{B}} T_c x)^{1/2}}{N} = 1 \tag{4}$$

$k_{\mathrm{B}} T_c$ をくくりだすと、

$$(k_{\mathrm{B}} T_c)^{3/2} D_0 \frac{V}{N} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} = 1 \tag{5}$$

したがって、T_c について解くと、

$$T_c = k_{\mathrm{B}}^{-1} \left\{ D_0 \frac{V}{N} I \right\}^{-2/3} \tag{6}$$

ここで、

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} \tag{7}$$

とした。I は V にも N にも依らない定数を表す。

$T \neq T_c$ の時は、

$$B_1(1) = (k_\mathrm{B}T)^{3/2} D_0 \frac{V}{N} I = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{8}$$

だから、$T < T_c$ の時は、$B_1(1) = (T/T_c)^{3/2} < 1$ が成り立つ。それゆえ、$T < T_c$ で BEC が起こると言える。

粒子数 N は温度 T と化学ポテンシャル μ で表すと、

$$N = \int D(\epsilon) \frac{d\epsilon}{\exp[(\epsilon - \mu)/k_\mathrm{B}T] - 1} + N_0 \tag{9}$$

$T < T_c$ では、$\mu = 0$ だから

$$N = \int D(\epsilon) \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_\mathrm{B}T] - 1} + N_0 \tag{10}$$

$D(\epsilon)$ に与えられた式を代入すると

$$N = \int D_0 V \epsilon^{1/2} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_\mathrm{B}T] - 1} + N_0 \tag{11}$$

右辺の 1 項目が $\epsilon > 0$ の粒子数、つまり N_e、2 項目が $\epsilon = 0$ の粒子数だから、

$$N_e = \int D_0 V \epsilon^{1/2} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_\mathrm{B}T] - 1} \tag{12}$$

$$N_0 = N - \int D_0 V \epsilon^{1/2} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_\mathrm{B}T] - 1} \tag{13}$$

(12) 式と (13) 式に対して (4) 式と、同様の変数変換をすると、

$$N_e = D_0 V (k_\mathrm{B}T)^{3/2} \int \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} \tag{14}$$

$$N_0 = N - D_0 V (k_\mathrm{B}T)^{3/2} \int \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} \tag{15}$$

(6) 式を使うと、

$$N_e = N(k_\mathrm{B}T_c)^{-3/2}(k_\mathrm{B}T)^{3/2} = N\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{16}$$

$$N_0 = N - N(k_\mathrm{B}T_c)^{-3/2}(k_\mathrm{B}T)^{3/2} = N - N\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \tag{17}$$

[問題 2.] 2 次元平面に閉じ込められたボース粒子の BEC はどうなるか？
ただし、
$D(\varepsilon) = \begin{cases} D_0(\text{定数}), & \varepsilon > 0 \\ 0, & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$ となることを使ってよい。

[解答] 授業で説明した様に、与えられた粒子数 N と温度 T のもとで、絶対活動度 z は、

$$B(z) \equiv \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\varepsilon)}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} d\varepsilon + \frac{1}{N}\frac{z}{1-z} = 1 \tag{18}$$

を解くことで得られる。ここで、$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ を表す。$z/(1-z)$ は、$z \to 1$ で発散するのは今までと同じ。

3 次元と違うのは、$B(z)$ の第 1 項についてで、問題で与えられている状態密度を代入すると、

$$\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\varepsilon)}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} d\varepsilon = \frac{1}{N}\int_{0}^{\infty} \frac{D_0 d\varepsilon}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} \tag{19}$$

この積分は $z \to 1$ で発散する。なぜなら、積分の下限に注目すると、ε は充分小さいから $\exp[\beta\varepsilon] = 1 + \beta\varepsilon + \cdots$ で、$(\exp[\beta\varepsilon] - 1) \sim \beta\varepsilon$となり、被積分関数は、$\varepsilon^{-1}$ に比例する。このような被積分関数を 0 から積分すると対数で発散することが知られている。

3 次元の場合は、z が 1 から充分離れていれば、第 2 項は $1/N$ に比例するので、充分小さくなり無視できる。しかし、z が 1 に近づいてくると、第 2 項は発散するので無視できなくなる。これがボース-アインシュタイン凝縮。

ところが、2 次元の場合は、第 1 項も $z \to 1$ で発散するので、すべての z の値で第 2 項より第 1 項が大きくなり、常に第 2 項を無視できる。したがって、ボース-アインシュタイン凝縮は起こらない。