

2012 年度統計力学 II 宿題 9 (6 月 14 日出題、6 月 21 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] BEC をおこす理想ボース気体で $D(\varepsilon) = D_0 V \varepsilon^{1/2} (\varepsilon \geq 0)$, $D(\varepsilon) = 0 (\varepsilon < 0)$ の時、 $T < T_c$ の圧力が T^n に比例することを示し、 n を求めよ。

[解答] (実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)

圧力には、 $\varepsilon = 0$ の粒子は寄与しないので、

$$P = -\frac{k_B T}{V} \int_{-\infty}^{\infty} D(\varepsilon) \ln(1 - z e^{-\varepsilon/k_B T}) d\varepsilon \quad (1)$$

与えられている $D(\varepsilon)$ を代入すると

$$= -\frac{k_B T}{V} \int_0^{\infty} D_0 V \varepsilon^{1/2} \ln(1 - z e^{-\varepsilon/k_B T}) d\varepsilon \quad (2)$$

$\beta = 1/k_B T$ として、部分積分する*1。

$$= -\frac{k_B T}{V} D_0 V \left\{ \left[\frac{2\varepsilon^{3/2}}{3} \ln(1 - z e^{-\beta\varepsilon}) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{2\varepsilon^{3/2}}{3} \frac{\beta z e^{-\beta\varepsilon}}{1 - z e^{-\beta\varepsilon}} d\varepsilon \right\} \quad (3)$$

$\varepsilon = 0$ で、 $\varepsilon^{3/2} = 0$ 、 $\varepsilon \rightarrow \infty$ で、 $\varepsilon^{3/2} \ln(1 - z e^{-\beta\varepsilon}) = 0$ だから

$$= \frac{k_B T}{V} D_0 V \int_0^{\infty} \frac{2\varepsilon^{3/2}}{3} \frac{\beta z e^{-\beta\varepsilon}}{1 - z e^{-\beta\varepsilon}} d\varepsilon = D_0 \int_0^{\infty} \frac{2\varepsilon^{3/2}}{3} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}/z - 1} d\varepsilon \quad (4)$$

$\beta\varepsilon = x$ とすると

$$= \frac{2D_0}{3} (k_B T)^{5/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{e^x/z - 1} dx \quad (5)$$

転移温度以下なので $z = 1$

$$= \frac{2D_0}{3} (k_B T)^{5/2} \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \quad \propto T^{5/2} \quad (6)$$

つまり、 $n = 5/2$

[問題 2.] $T < T_c$ で、圧力に $\varepsilon = 0$ の項が寄与しないことを [問題 1.] の①の $D(\varepsilon)$ で授業と別の方法で示せ。エネルギーの温度依存性と比熱の式から圧力を求めよ。

[解答] BEC が起きている状態を考慮するので、 $z = 1$ として、計算すると、

$$E = CVT^{5/2} \quad (7)$$

ここで、

$$C = D_0 k_B^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \quad (8)$$

定積比熱は、定義から

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{5CV}{2} T^{3/2} \quad (9)$$

熱力学の関係式から

$$C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{NV} \quad (10)$$

だから、熱力学第 3 法則と合せて

$$S = \int_0^T \frac{C_v}{T'} dT' \quad (11)$$

C_v は、 $T^{3/2}$ に比例しているので、

$$= \frac{5}{3} CVT^{3/2} \quad (12)$$

ヘルムホルツの自由エネルギーを A とすると、 $A = E - TS$ だから、(7) 式と (12) 式から

$$A = CVT^{5/2} - T \frac{5}{3} CVT^{3/2} = -\frac{2}{3} CVT^{5/2} \quad (13)$$

*1 (別解) 部分積分をしなくても正解です。直接変数変換しても構いません。

圧力 P は、

$$P = - \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_{NT} = \frac{2}{3} CT^{5/2} \quad (14)$$

一方、グランドカノニカル分布から直接圧力を計算すると、[問題 1.] と同様に、

$$P = \frac{2D_0}{3} (k_B T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx - \frac{k_B T}{V} \ln(1 - z) \quad (15)$$

と変形できるが、右辺の 2 項目は、 $\epsilon = 0$ の寄与を表す。1 項目は、(8) 式から

$$\frac{2D_0}{3} (k_B T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx = \frac{2}{3} CT^{5/2} \quad (16)$$

と書けるから、(14) 式と比べれば、(15) 式の右辺第 2 項は 0 になることが分かる。

参考: ランダウ・リフシッツ「統計物理学上」小林秋男他訳 (岩波書店) P228