

2013 年度 統計力学 II 宿題 3 (5 月 2 日出題、5 月 9 日提出) 解答

吉森 明

[問題 1.] 角振動数 ω の調和振動子系について 1 粒子のエネルギー固有値が $\varepsilon_\ell = \hbar\omega\ell$ ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) で与えられている。 $\varepsilon \gg \hbar\omega$ で、状態が密のとき $D(\varepsilon)$ を求めなさい。

[解答] $D(\varepsilon)$ の定義は、単位 ε あたりの状態の数なので、

$$D(\varepsilon) = \frac{\varepsilon \text{ から } \varepsilon + \Delta\varepsilon \text{ までの状態の数}}{\Delta\varepsilon} \quad (1)$$

今の場合、状態の間隔は等間隔なので、「 ε から $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ までの状態の数」は、「 $\Delta\varepsilon$ /状態の間隔」でだいたい与えられる。ただし、 ε と $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ にちょうど状態があるかないかで少し違いがでるが、 ε が充分大きければ、無視できる。「状態の間隔」は $\hbar\omega$ なので、

$$\varepsilon \text{ から } \varepsilon + \Delta\varepsilon \text{ までの状態の数} = \frac{\Delta\varepsilon}{\hbar\omega} \quad (2)$$

したがって、

$$D(\varepsilon) = \frac{1}{\hbar\omega} \quad (3)$$

[問題 2.] 波動関数が $\psi(0, y, z) = \psi(L, y, z) = \psi(x, 0, z) = \psi(x, L, z) = \psi(x, y, 0) = \psi(x, y, L)$ を満たすときエネルギー固有値を求めなさい。

[略解](詳しくは「岩波基礎物理学シリーズ 7 「統計力学」、長岡洋介 著、岩波書店」P32-34 参照のこと) 変数分離法で解けば、簡単に求められる。答えだけ書くと、エネルギー固有値を ε_1 とすると、

$$\varepsilon_1 = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{k}(\mathbf{l})|^2 \quad (4)$$

ここで、

$$\mathbf{k}(\mathbf{l}) = \frac{\pi}{L} \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z), \quad (5)$$

$l_x = 1, 2, \dots, l_y = 1, 2, \dots, l_z = 1, 2, \dots$ を表す。