2013 年度統計力学 II 宿題 6 (5 月 30 日出題、6 月 6 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $E = G(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 D(\varepsilon_F)$ を授業で省いた計算を補って示せ。

[解答]$E = \int_0^\varepsilon \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$ を T で展開する。公式で $X(\varepsilon) = \varepsilon D(\varepsilon)$、

$$\widetilde{X}(\mu) = G(\mu) \equiv \int_0^\mu \varepsilon' D(\varepsilon') d\varepsilon' \tag{1}$$

とすると、

$$\int_0^\infty \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = G(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B} T)^2 \left. \frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \mu} \tag{2}$$

(2) 式は、T のベキの係数が μ で表されているが、問題の式は ϵ_F なので、$\mu = \varepsilon_F + C_2 T^2$ を代入して μ を消去する。C_2 は宿題 5 の 1.③から ϵ_F で表される。ϵ_F は N で表されるので、T の係数のベキを ϵ_F を使って表すと、N で表すことになる。

$$E = G(\varepsilon_F + C_2 T^2) + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B} T)^2 \left. \frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F + C_2 T^2} \tag{3}$$

右辺 1 項目は、

$$G(\varepsilon_F + C_2 T^2) = G(\varepsilon_F) + C_2 T^2 \left. \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \tag{4}$$

2 項目は、T^2 までで

$$\frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B} T)^2 \left. \frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F + C_2 T^2} = \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B} T)^2 \left. \frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \tag{5}$$

あわせて、

$$E = G(\varepsilon_F) + C_2 T^2 \left. \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B} T)^2 \left. \frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \tag{6}$$

さらに計算を進めると、(1) 式から

$$\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \varepsilon D(\varepsilon) \tag{7}$$

また、宿題 5 の 1.③

$$C_2 = -\frac{\pi^2}{6}\frac{k_{\mathrm{B}}^2}{D(\varepsilon_F)}\left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \tag{8}$$

を代入すると、

$$C_2 T^2 \left.\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} = -\frac{\pi^2}{6}\frac{k_{\mathrm{B}}^2}{D(\varepsilon_F)}\left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} T^2 \left.\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \tag{9}$$

(7) 式を代入すると、

$$= -\frac{\pi^2}{6}\frac{k_{\mathrm{B}}^2}{D(\varepsilon_F)}\left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} T^2 \varepsilon_F D(\varepsilon_F) \tag{10}$$

$D(\varepsilon_F)$ が分母分子にあるから、

$$= -\frac{\pi^2}{6}k_{\mathrm{B}}^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} T^2 \varepsilon_F \tag{11}$$

一方、

$$\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} = D(\varepsilon) + \varepsilon\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \tag{12}$$

だから、(6) 式の 3 項目は、

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 &\left.\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \\ &= \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \left.\varepsilon\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F}\end{aligned} \tag{13}$$

全部足すと、

$$\begin{aligned}E = G(\varepsilon_F) &- \frac{\pi^2}{6}k_{\mathrm{B}}^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} T^2 \varepsilon_F \\ &+ \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 \left.\varepsilon_F\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon = \varepsilon_F}\end{aligned} \tag{14}$$

2 項目と 4 項目がキャンセルして

$$E = G(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 D(\varepsilon_F) \tag{15}$$

[問題 2.] プリント「授業ノート 1」の (31) 式から (32) 式を導く条件から μ と最低準位 ε_0 の関係を示せ。

[解答] 「授業ノート 1」でやったように、大分配関数は、$\Xi = \prod_l \Xi_l$ のように書ける。Ξ_l は、ボース粒子の場合、プリントの (16) 式

$$\Xi_l = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z e^{-\beta\varepsilon_l} \right)^n \tag{16}$$

で表せる。これは、無限等比級数で、収束するためには、

$$z e^{-\beta\varepsilon_l} < 1 \tag{17}$$

$z = \exp[\beta\mu]$ だから、$\beta > 0$ を使って、

$$\mu - \varepsilon_l < 0 \tag{18}$$

これはすべてのエネルギー準位 ε_l で、成り立たなければならない。

もし、箱に入った自由粒子のようにエネルギー準位に最小がある時は、その値を ε_0 とすると、

$$\mu < \varepsilon_0 \tag{19}$$

であれば、$\varepsilon_0 \leq \varepsilon_l$ だから、全てのエネルギー準位で、(18) 式を満たす。