2013 年度統計力学 II 宿題 7 (6 月 6 日出題、6 月 13 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.]$\varepsilon_{\vec{\ell}} = c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})|$ のとき、授業で説明したのと同じように $N = \sum_{\vec{\ell}} b(\varepsilon_{\vec{\ell}})$ が積分に直せるか調べよ。

[解答] 授業で取り上げた

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} << \frac{N}{V} \tag{1}$$

が全ての $\vec{\ell}$ について成り立つか、N/V を一定にして、$N \to \infty$、$V \to \infty$ の極限で調べる。ここで、N と V は全粒子数と体積を表す。

$b(\varepsilon_{\vec{\ell}})$ の式を代入すると、

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} = \frac{1}{V}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}}/z - 1} \tag{2}$$

$z < 1$ だから

$$< \frac{1}{V}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}} - 1} \tag{3}$$

$V = L^3$ だから $V \to \infty$ は $L \to \infty$ と同じだから、$L \to \infty$ とすると、$|\vec{k}|$ は小さくなり、$\varepsilon_{\vec{\ell}}$ も小さくなる。指数関数をテーラー展開すると、

$$\xrightarrow{L\to\infty} \frac{1}{V}\frac{1}{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}} \tag{4}$$

$V = L^3$ と問題の $\varepsilon_{\vec{\ell}}$ を代入すると、

$$= \frac{1}{L^3}\frac{1}{\beta}\left\{c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})|\right\}^{-1} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{L^3}\frac{1}{\beta}\left\{c\hbar\frac{2\pi|\vec{\ell}|}{L}\right\}^{-1} \tag{6}$$

$$\propto \frac{1}{L^2} \xrightarrow{L\to\infty} 0 \tag{7}$$

つまり、N/V を一定にして、$L \to \infty$ にすると、

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} \to 0 \tag{8}$$

ただし、$\vec{\ell} = 0$ は除く。結局この極限では、$\varepsilon_{\vec{\ell}} > 0$ で (1) 式が満たされることが分る。

[問題 2.] 2次元平面に閉じ込められたボース粒子の BEC はどうなるか？ただし、
$D(\varepsilon) = \begin{cases} D_0(\text{定数}), & \varepsilon > 0 \\ 0, & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$ を使ってよい。[*1]

[解答] 授業で説明した様に、与えられた粒子数 N と温度 T のもとで、絶対活動度 z は、

$$B(z) \equiv \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\varepsilon)}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} d\varepsilon + \frac{1}{N}\frac{z}{1-z} = 1 \tag{9}$$

を解くことで得られる。ここで、$\beta = 1/(k_\mathrm{B}T)$ を表す。$z/(1-z)$ は、$z \to 1$ で発散するのは今までと同じ。

3 次元と違うのは、$B(z)$ の第 1 項についてで、問題で与えられている状態密度を代入すると、

$$\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\varepsilon)}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} d\varepsilon = \frac{1}{N}\int_{0}^{\infty} \frac{D_0 d\varepsilon}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} \tag{10}$$

この積分は $z \to 1$ で発散する。なぜなら、積分の下限に注目すると、ε は充分小さいから $\exp[\beta\varepsilon] = 1 + \beta\varepsilon + \cdots$ で、$(\exp[\beta\varepsilon] - 1) \sim \beta\varepsilon$となり、被積分関数は、$\varepsilon^{-1}$ に比例する。このような被積分関数を 0 から積分すると対数で発散することが知られている。

3 次元の場合は、z が 1 から充分離れていれば、第 2 項は $1/N$ に比例するので、充分小さくなり無視できる。しかし、z が 1 に近づいてくると、

[*1] 問題が分かりにくくて申し訳ありませんでした。以下のような解答を想定していました。

第 2 項は発散するので無視できなくなる。これがボース-アインシュタイン凝縮。

ところが、2 次元の場合は、第 1 項も $z \to 1$ で発散するので、すべての z の値で第 2 項より第 1 項が大きくなり、常に第 2 項を無視できる。したがって、ボース-アインシュタイン凝縮は起こらない。