2013 年度統計力学 II 宿題 8 (6 月 13 日出題、6 月 20 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $\varepsilon > 0, D(\varepsilon) = D_0 V \varepsilon^{\frac{1}{2}}$($V$ は体積) $\varepsilon \leq 0, D(\varepsilon) = 0$ の時、$x = \beta\epsilon$ と変数変換して T_B が $D_0^{-\frac{2}{3}}$ に比例することと $T < T_B$ で $B_1(1) < 1$ となることを示せ。また、$T < T_B$ のとき $\varepsilon > 0$ の粒子数 N_e と $\varepsilon = 0$ の粒子数 N_0 を全粒子数 N と T、T_B で表せ。

[解答] T_B は

$$B_1(1) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\epsilon) \frac{D(\epsilon)}{N} d\epsilon = 1 \tag{1}$$

の条件を満たす温度として定義されている。ここで、$b(\epsilon)$ はボース分布を表し、ただし、$z = 1$、$T = T_B$、つまり

$$b(\epsilon) = \frac{1}{\exp[\epsilon / k_\mathrm{B} T_B] - 1} \tag{2}$$

問題で与えられている $D(\epsilon)$ を代入すると、

$$\int_0^\infty \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon / k_\mathrm{B} T_B] - 1} \frac{D_0 V \epsilon^{1/2}}{N} = 1 \tag{3}$$

$\epsilon / k_\mathrm{B} T_B = x$ として変数変換する。$dx = d\epsilon / k_\mathrm{B} T_B$ だから、

$$\int_0^\infty \frac{k_\mathrm{B} T_B dx}{\exp[x] - 1} \frac{D_0 V (k_\mathrm{B} T_B x)^{1/2}}{N} = 1 \tag{4}$$

$k_\mathrm{B} T_B$ をくくりだすと、

$$(k_\mathrm{B} T_B)^{3/2} D_0 \frac{V}{N} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} = 1 \tag{5}$$

したがって、T_B について解くと、

$$T_B = k_\mathrm{B}^{-1} \left\{ D_0 \frac{V}{N} I \right\}^{-2/3} \tag{6}$$

ここで、

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} \tag{7}$$

とした。I は V にも N にも依らない定数を表す。

$T \neq T_B$ の時は、

$$B_1(1) = (k_\mathrm{B}T)^{3/2} D_0 \frac{V}{N} I = \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \tag{8}$$

だから、$T < T_B$ の時は、$B_1(1) = (T/T_B)^{3/2} < 1$ が成り立つ。それゆえ、$T < T_B$ で BEC が起こると言える。

粒子数 N は温度 T と化学ポテンシャル μ で表すと、

$$N = \int D(\epsilon) \frac{d\epsilon}{\exp[(\epsilon-\mu)/k_\mathrm{B}T]-1} + N_0 \tag{9}$$

$T < T_B$ では、$\mu = 0$ だから

$$N = \int D(\epsilon) \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_\mathrm{B}T]-1} + N_0 \tag{10}$$

$D(\epsilon)$ に与えられた式を代入すると

$$N = \int D_0 V \epsilon^{1/2} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_\mathrm{B}T]-1} + N_0 \tag{11}$$

右辺の 1 項目が $\epsilon > 0$ の粒子数、つまり N_e、2 項目が $\epsilon = 0$ の粒子数だから、

$$N_e = \int D_0 V \epsilon^{1/2} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_\mathrm{B}T]-1} \tag{12}$$

$$N_0 = N - \int D_0 V \epsilon^{1/2} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_\mathrm{B}T]-1} \tag{13}$$

(12) 式と (13) 式に対して (4) 式と、同様の変数変換をすると、

$$N_e = D_0 V (k_\mathrm{B}T)^{3/2} \int \frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} \tag{14}$$

$$N_0 = N - D_0 V (k_\mathrm{B}T)^{3/2} \int \frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} \tag{15}$$

(6) 式を使うと、

$$N_e = N(k_{\mathrm{B}}T_B)^{-3/2}(k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} = N\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \tag{16}$$

$$N_0 = N - N(k_{\mathrm{B}}T_B)^{-3/2}(k_{\mathrm{B}}T)^{3/2} = N - N\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \tag{17}$$

[問題 2.] $T = 0$ では $\epsilon_l = 0$ のエネルギー最低状態をすべての粒子がとるのだから、十分低温では、$\epsilon_l = 0$ の状態に「凝縮」するのはあたりまえという考え方が間違っていることを示せ。

[解答] いろいろな解答が考えられるが、ここでは「統計力学 II (田崎晴明、培風館、新物理学シリーズ)P404」での議論を紹介する。

間違っている事を示したい考え方は、特にボース粒子でなくても成り立つので、古典的な粒子のようにそれぞれの粒子が独立に振る舞う場合を考える。もちろんその場合でも $T = 0$ では $\epsilon_l = 0$ のエネルギー最低状態をすべての粒子がとる。

今、$T > 0$ ではあるが十分低温の場合を考えると、粒子は $k_{\mathrm{B}}T$ 以下の 1 粒子固有状態のいずれかをほぼ等確率にとる。0 から ϵ までの状態の数を $N(\epsilon)$ とすると、$\epsilon_l = 0$ の状態に粒子がなる確率は、$1/N(k_{\mathrm{B}}T)$ となり、全粒子数が N の時は、$\epsilon_l = 0$ の粒子数 N_0 は $N/N(k_{\mathrm{B}}T)$ と計算できる。箱に入った自由粒子の場合は $N(k_{\mathrm{B}}T)$ は $VT^{3/2}$ (V は体積) に比例するので、$N_0 = N/N(k_{\mathrm{B}}T)$ は、$\rho T^{-3/2}$ に比例する。ここで ρ は密度を表す。確かにこの式は低温、高密度では大きくなるが、BEC の特徴である $N_0 \propto N$ という振る舞いは全く再現できない。