2013 年度統計力学 II 宿題 9 (6 月 20 日出題、6 月 27 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] BEC をおこす理想ボース気体で $D(\varepsilon) = D_0 V \varepsilon^{\frac{1}{2}} (\varepsilon \geq 0), D(\varepsilon) = 0 (\varepsilon < 0)$ の時、$T < T_c$ の圧力が T^n に比例することを示し、n を求めよ。

[解答] (実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)
　圧力には、$\varepsilon = 0$ の粒子は寄与しないので、

$$P = -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V} \int_{-\infty}^{\infty} D(\varepsilon) \ln(1 - z e^{-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T}) d\varepsilon \tag{1}$$

与えられている $D(\varepsilon)$ を代入すると

$$= -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V} \int_{0}^{\infty} D_0 V \varepsilon^{1/2} \ln(1 - z e^{-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T}) d\varepsilon \tag{2}$$

$\varepsilon / k_{\mathrm{B}}T = x$ とすると

$$= -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V} \int_{0}^{\infty} D_0 V (k_{\mathrm{B}}Tx)^{1/2} \ln(1 - z e^{-x}) k_{\mathrm{B}}T dx \tag{3}$$

転移温度以下なので $z = 1$

$$= -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V} \int_{0}^{\infty} D_0 V (k_{\mathrm{B}}Tx)^{1/2} \ln(1 - e^{-x}) k_{\mathrm{B}}T dx \tag{4}$$

整理すると

$$= -(k_{\mathrm{B}}T)^{5/2} D_0 \int_{0}^{\infty} x^{1/2} \ln(1 - e^{-x}) dx \qquad \propto T^{5/2} \tag{5}$$

つまり、$n = 5/2$

[問題 2.] $T < T_c$ で、圧力に $\varepsilon = 0$ の項が寄与しないことを [問題 1.] の $D(\varepsilon)$ で授業と別の方法で示せ。$E = CVT^{5/2}$(C は定数) から比熱を求めそれを積分してエントロピーを出し、F を求めて V で微分して圧力を求めよ。

[解答] BEC が起きている状況を考えるので、$z=1$ として、計算すると、

$$E = CVT^{5/2} \tag{6}$$

ここで、

$$C = D_0 k_{\mathrm{B}}^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \tag{7}$$

定積比熱は、定義から

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{5CV}{2} T^{3/2} \tag{8}$$

　熱力学の関係式から

$$C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{NV} \tag{9}$$

だから、熱力学第 3 法則と合せて

$$S = \int_0^T \frac{C_v}{T'} dT' \tag{10}$$

C_v は、$T^{3/2}$ に比例しているので、

$$= \frac{5}{3} CVT^{3/2} \tag{11}$$

　ヘルムホルツの自由エネルギーを A とすると、$F = E - TS$ だから、(6) 式と (11) 式から

$$F = CVT^{5/2} - T\frac{5}{3}CVT^{3/2} = -\frac{2}{3}CVT^{5/2} \tag{12}$$

圧力 P は、

$$P = -\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_{NT} = \frac{2}{3} CT^{5/2} \tag{13}$$

　一方、グランドカノニカル分布から直接圧力を計算すると、[問題 1.] と同様に、

$$P = \frac{2D_0}{3} (k_{\mathrm{B}} T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx - \frac{k_{\mathrm{B}} T}{V} \ln(1 - z) \tag{14}$$

と変形できるが、右辺の 2 項目は、$\epsilon = 0$ の寄与を表す。1 項目は、(7) 式から

$$\frac{2D_0}{3}(k_{\rm B}T)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x-1}dx = \frac{2}{3}CT^{5/2} \tag{15}$$

と書けるから、(13) 式と比べれば、(14) 式の右辺第 2 項は 0 になることが分かる。

参考: ランダウ・リフシッツ「統計物理学上」小林秋男他訳（岩波書店）P228