すべての問題で、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの (解答にはプランク定数ではなく $\hbar$ を使いなさい)、k_{B} は、ボルツマン定数を表し、T は温度、$\beta \equiv 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする。また、V は体積、N は粒子数で、V も N も充分大きく、$1/V$ や $1/N$ は無視する。N/V は無視しない。1 粒子の状態は密に詰まっている。特に断りがなければ平衡状態を考える。

1. 1 辺が L の 3 次元内の立方体に閉じ込められた理想フェルミ気体を考える。1 粒子のエネルギー固有値が
$$\epsilon_{\boldsymbol{l}} = A|\mathbf{k}(\boldsymbol{l})|^a + \epsilon_0 \tag{1}$$
となることが分かっている。ただし、A と a と ϵ_0 は $\boldsymbol{l}$ によらない定数で、$A > 0$、$0 < a < 3$。波数ベクトル $\mathbf{k}(\boldsymbol{l})$ は、
$$\mathbf{k}(\boldsymbol{l}) = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{l}, \qquad \boldsymbol{l} = (l_x, l_y, l_z), \qquad l_x, l_y, l_z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2}$$
で、与えられる。内部自由度は無視する。

(a) この系の状態密度 $D(\epsilon)$ が
$$D(\epsilon) = VD_0(\epsilon - \epsilon_0)^n, \qquad \epsilon \geq \epsilon_0 \tag{3}$$
と表せるとき、D_0 と n を求めなさい。また、$\epsilon < \epsilon_0$ のとき、$D(\epsilon)$ はどうなるか。

(b) P を圧力、E をエネルギーとした時、$PV = \alpha(E - N\epsilon_0)$ が成り立つ。$T \neq 0$ で α を n で表しなさい。ただし、
$$PV = k_{\mathrm{B}}T\sum_{l} \ln(1 + e^{-\beta(\epsilon_l - \mu)}) \tag{4}$$
$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \tag{5}$$
$$\lim_{x\to\infty} x^y \ln(1 + ze^{-x}) = 0, \qquad (y\text{、}z \text{ は } x \text{ によらない実数}) \tag{6}$$
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon D(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon \tag{7}$$
$$N\epsilon_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon_0 D(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon \tag{8}$$
を使っても良い。

2. 状態密度 $D(\epsilon)$ が問題 1 と同じ (3) 式で与えられている理想ボース気体を考える。$T = T_B$ のとき N は $(T_B)^m$ に比例する。m を n で表せ。ただし、T_B はボース-アインシュタイン凝縮 (BEC) が起こる温度を表し、

$$b(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} \tag{9}$$

を使っても良い。

ヒント: この場合のボース-アインシュタイン凝縮は、$\underline{\mu = 0}$ **でなく、**$\underline{\mu = \epsilon_0}$ で起こる。

3. 立方体の容器に閉じ込められている光子に関するシュテファン-ボルツマン則 $(u = \sigma T^4)$ について、σ の具体的な形を求めなさい。ここで、u は単位体積あたりの全エネルギーで、σ は温度によらないある定数を表す。σ の具体的な形には光速 c を使え。必要なら次の公式を使って良い。

$$\omega = c|\mathbf{k}(\boldsymbol{l})| \tag{10}$$

$$\mathbf{k}(\boldsymbol{l}) = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{l}, \qquad L^3 = V \qquad \boldsymbol{l} = (l_x, l_y, l_z), \qquad l_x, l_y, l_z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{11}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \tag{12}$$

4. 水素分子の理想気体を量子論的に考える。水素原子は、スピン 1/2 のフェルミ粒子で、慣性モーメント I を持った剛体回転子とする。分子 1 個の回転運動のエネルギー準位は、方位量子数 ℓ を使って、

$$\epsilon_\ell = \frac{\hbar^2}{2I}\ell(\ell + 1) \qquad (\ell = 0, 1, 2, \ldots) \tag{13}$$

で与えられる。回転運動の固有状態を指定する量子数は、ℓ の他に m もあり、$-\ell \le m \le \ell$。$\Theta = \hbar^2/(2Ik_{\mathrm{B}})$ とすると、$T << \Theta$ の低温の極限で $\ell > 2$ を無視するとき、次の問いに答えよ。

(a) 1 分子の分配関数に対する回転とスピンの寄与 j を求めなさい。ただし、スピンの固有関数について粒子を入れかえた時に符号が変わらないものから計算した分配関数を z_S、変わるものから計算した分配関数を z_A とすると、水素分子は $z_S = 3$、$z_A = 1$ と計算できる。

(b) 1 分子のヘルムホルツの自由エネルギーに対する回転とスピンの寄与 f について、絶対値が最も大きいものから 2 つ書くと、

$$f = Ak_{\mathrm{B}}T\exp[-B\frac{\Theta}{T}] + Ck_{\mathrm{B}}T\exp[-D\frac{\Theta}{T}]\cdots \tag{14}$$

となる。実数 D を求めよ。実数 A、B、C は求めなくても良い。必要なら、次の公式を使っても良いが、x を答えに書いてはいけない。

$$|x| << 1 \text{ で、} \qquad \ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} \tag{15}$$

$$f = -k_{\mathrm{B}}T\ln j \tag{16}$$

5. 次のハミルトニアン

$$H = -\sum_{(i,j)} J\sigma_i\sigma_j \tag{17}$$

で表される格子の上に並んだスピン系がある。J は σ_i によらない正の定数を表す。和 $\sum_{(i,j)}$ は、隣り合う格子の組についてとる。各格子点にあるスピンは、$\sigma_i = -1, 1$ の 2 つの状態をとるものとして、カノニカル分布に対する平均場近似を使って、相転移が起こる温度 T_c を次の様に求めなさい。ただし、隣り合う格子の数は z とする。

(a) まず、1 つの粒子に注目し、その粒子の変数を σ_1 とする。H にある他の粒子の変数 σ_i $(i \neq 1)$ を平均値 $\langle\sigma\rangle$ に置き換えたハミルトニアンのうち、σ_1 と関係する部分を H_A とする。H_A を求めなさい。

(b) H_A を使って、1 番目の粒子のスピンが σ_1 の状態にある確率 $P_1(\sigma_1)$ を求めよ。

(c) $\langle\sigma\rangle$ に関する方程式を $\langle\sigma\rangle = f(\langle\sigma\rangle)$ の形で求めなさい。ここで、$f(\langle\sigma\rangle)$ はある $\langle\sigma\rangle$ の関数を表す。

(d) $\langle\sigma\rangle = f(\langle\sigma\rangle)$ の解の個数は、$f(\langle\sigma\rangle)$ の微分が $\langle\sigma\rangle = 0$ で 1 になる温度で変わる。このことを使って、T_c を求めなさい。