

[問題 1.] $\mu = \varepsilon_F + C_1 T + C_2 T^2$ としたとき、 $C_1 = 0$ 、 $C_2 = -\frac{\pi^2}{6} \frac{k_B^2}{D(\varepsilon_F)} \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_F}$ をまた $E = G(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 D(\varepsilon_F)$ を授業で省いた計算を補って示せ。

[解答] 次の公式

$$\int_0^\infty X(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \tilde{X}(\mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{dX(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\mu} \quad (1)$$

を使う。この公式は、 T^3 まで正しい。ただし、 $X(\varepsilon)$ は T を含まない任意関数で

$$\tilde{X}(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon X(\varepsilon') d\varepsilon' \quad (2)$$

また、 $f(\varepsilon)$ はフェルミの分布関数を表す。

最初は、 $N = \int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$ を T で展開する。公式で $X(\varepsilon) = D(\varepsilon)$ 、

$$\tilde{X}(\mu) = N(\mu) \equiv \int_0^\mu D(\varepsilon') d\varepsilon' \quad (3)$$

とすると、

$$\int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = N(\mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\mu} \quad (4)$$

次に μ を T で展開する。 $\mu = \varepsilon_F + C_1 T + C_2 T^2$ として、

$$N = N(\mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\mu} \quad (5)$$

に代入して、 T のべきの係数を計算する。

右辺 1 項目は、

$$N(\varepsilon_F + C_1 T + C_2 T^2) = N(\varepsilon_F) + (C_1 T + C_2 T^2) \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_F} + \frac{(C_1 T + C_2 T^2)^2}{2} \frac{d^2 N(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \quad (6)$$

2 項目は、 T^2 までで

$$\frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\mu} = \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \quad (7)$$

2つを合わせると、

$$N = N(\epsilon_F) + (C_1 T + C_2 T^2) \left. \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon = \epsilon_F} + \frac{(C_1 T + C_2 T^2)^2}{2} \left. \frac{d^2 N(\epsilon)}{d\epsilon^2} \right|_{\epsilon = \epsilon_F} + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{dD(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon = \epsilon_F} \quad (8)$$

この式は恒等式だから T のべきの係数を 0 において、 C_1 、 C_2 を計算する。 T の係数から

$$C_1 \left. \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon = \epsilon_F} = 0 \quad (9)$$

ゆえに $C_1 = 0$

T^2 の係数から

$$C_2 \left. \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon = \epsilon_F} + \frac{\pi^2}{6} k_B^2 \left. \frac{dD(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon = \epsilon_F} = 0 \quad (10)$$

ただし、 $C_1 = 0$ を使った。 C_2 について解くと、

$$C_2 = -\frac{\pi^2}{6} \frac{k_B^2}{D(\epsilon_F)} \left. \frac{dD(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon = \epsilon_F} \quad (11)$$

$E = \int_0^\epsilon \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$ を T で展開する。公式で $X(\epsilon) = \epsilon D(\epsilon)$ 、

$$\tilde{X}(\mu) = G(\mu) \equiv \int_0^\mu \epsilon' D(\epsilon') d\epsilon' \quad (12)$$

とすると、

$$\int_0^\infty \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = G(\mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{d(\epsilon D(\epsilon))}{d\epsilon} \right|_{\epsilon = \mu} \quad (13)$$

(13) 式は、 T のべきの係数が μ で表されているが、問題の式は ϵ_F なので、 $\mu = \epsilon_F + C_2 T^2$ を代入して μ を消去する。 C_2 は (11) 式から ϵ_F で表される。 ϵ_F は N で表されるので、 T の係数のべきを ϵ_F を使って表すと、 N で表すことになる。

$$E = G(\epsilon_F + C_2 T^2) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{d(\epsilon D(\epsilon))}{d\epsilon} \right|_{\epsilon = \epsilon_F + C_2 T^2} \quad (14)$$

右辺 1 項目は、

$$G(\epsilon_F + C_2 T^2) = G(\epsilon_F) + C_2 T^2 \left. \frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon = \epsilon_F} \quad (15)$$

2項目は、 T^2 までで

$$\frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \left. \frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} + C_2 T^2 = \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \left. \frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \quad (16)$$

あわせて、

$$E = G(\varepsilon_F) + C_2 T^2 \left. \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \left. \frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \quad (17)$$

さらに計算を進めると、(12) 式から

$$\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \varepsilon D(\varepsilon) \quad (18)$$

また、(11) 式を代入すると、

$$C_2 T^2 \left. \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} = -\frac{\pi^2}{6} \frac{k_B^2}{D(\varepsilon_F)} \left. \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} T^2 \left. \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \quad (19)$$

(18) 式を代入すると、

$$= -\frac{\pi^2}{6} \frac{k_B^2}{D(\varepsilon_F)} \left. \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} T^2 \varepsilon_F D(\varepsilon_F) \quad (20)$$

$D(\varepsilon_F)$ が分母分子にあるから、

$$= -\frac{\pi^2}{6} k_B^2 \left. \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} T^2 \varepsilon_F \quad (21)$$

一方、

$$\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} = D(\varepsilon) + \varepsilon \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \quad (22)$$

だから、(17) 式の 3 項目は、

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \left. \frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \\ = \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \varepsilon_F \left. \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \end{aligned} \quad (23)$$

全部足すと、

$$\begin{aligned} E = G(\varepsilon_F) - \frac{\pi^2}{6} k_B^2 \left. \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} T^2 \varepsilon_F \\ + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 \varepsilon_F \left. \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_F} \end{aligned} \quad (24)$$

2項目と4項目がキャンセルして

$$E = G(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 D(\varepsilon_F) \quad (25)$$

[問題 2.] プリント「授業ノート 1」の (32) 式から (33) 式を導く条件から μ と最低準位 ε_0 の関係を示せ。

[解答] 「授業ノート 1」でやったように、大分配関数は、 $\Xi = \prod_l \Xi_l$ のように書ける。 Ξ_l は、ボース粒子の場合、プリントの (16) 式

$$\Xi_l = \sum_{n=0}^{\infty} (ze^{-\beta\varepsilon_l})^n \quad (26)$$

で表せる。これは、無限等比級数で、収束するためには、

$$ze^{-\beta\varepsilon_l} < 1 \quad (27)$$

$z = \exp[\beta\mu]$ だから、 $\beta > 0$ を使って、

$$\mu - \varepsilon_l < 0 \quad (28)$$

これはすべてのエネルギー準位 ε_l で、成り立たなければならない。

もし、箱に入った自由粒子のようにエネルギー準位に最小がある時は、その値を ε_0 とすると、

$$\mu < \varepsilon_0 \quad (29)$$

であれば、 $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_l$ だから、全てのエネルギー準位で、(28) 式を満たす。