2014 年度統計力学 II 宿題 7 (5 月 29 日出題、6 月 6 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $\varepsilon_{\vec{\ell}} = c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})|$ のとき、授業で説明したのと同じように $b(\varepsilon_{\vec{\ell}})/V << N/V$ を示せ ($\vec{\ell} \neq 0$)。

[解答] 授業で取り上げた

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} << \frac{N}{V} \tag{1}$$

が全ての $\vec{\ell}$ について成り立つか、N/V を一定にして、$N \to \infty$、$V \to \infty$ の極限で調べる。ここで、N と V は全粒子数と体積を表す。

$b(\varepsilon_{\vec{\ell}})$ の式を代入すると、

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} = \frac{1}{V}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}}/z - 1} \tag{2}$$

$z < 1$ だから

$$< \frac{1}{V}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}} - 1} \tag{3}$$

$V = L^3$ だから $V \to \infty$ は $L \to \infty$ と同じだから、$L \to \infty$ とすると、$|\vec{k}|$ は小さくなり、$\varepsilon_{\vec{\ell}}$ も小さくなる。指数関数をテーラー展開すると、

$$\xrightarrow{L\to\infty} \frac{1}{V}\frac{1}{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}} \tag{4}$$

$V = L^3$ と問題の $\varepsilon_{\vec{\ell}}$ を代入すると、

$$= \frac{1}{L^3}\frac{1}{\beta}\left\{c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})|\right\}^{-1} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{L^3}\frac{1}{\beta}\left\{c\hbar\frac{2\pi|\vec{\ell}|}{L}\right\}^{-1} \tag{6}$$

$$\propto \frac{1}{L^2} \xrightarrow{L\to\infty} 0 \tag{7}$$

つまり、N/V を一定にして、$L \to \infty$ にすると、

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} \to 0 \tag{8}$$

ただし、$\vec{\ell}=0$ は除く。結局この極限では、$\varepsilon_{\vec{\ell}}>0$ で (1) 式が満たされることが分る。

[問題 2.] $D(\varepsilon)\propto\varepsilon^{1/2}$ のとき、$\int_0^\infty D(\varepsilon)b(\varepsilon)d\varepsilon$ が $z\to 1$ で発散しないことを示せ。ただし、$b(\varepsilon)$ はボース分布。

[解答] $b(\varepsilon)$ は、

$$b(\varepsilon)=\frac{1}{\exp[\beta\varepsilon]/z-1} \tag{9}$$

だから、$z=1$ にして、$\int_0^\infty D(\varepsilon)b(\varepsilon)d\varepsilon$ に $D(\varepsilon)\propto\varepsilon^{1/2}$ を代入すると、

$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[\beta\varepsilon]-1}d\varepsilon \tag{10}$$

この積分が発散しないことを示せば良い。

積分の下限に注目すると、ε は充分小さいから $\exp[\beta\varepsilon]=1+\beta\varepsilon+\cdots$ で、$(\exp[\beta\varepsilon]-1)\sim\beta\varepsilon$となり、被積分関数は、$\varepsilon^{-1/2}$ に比例する。このような被積分関数を 0 から積分しても発散しないことが知られている。

もう少し正確に証明する。充分小さい $a>0$ に対して、積分区間を分けると

$$\int_a^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[\beta\varepsilon]-1}d\varepsilon+\int_0^a \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[\beta\varepsilon]-1}d\varepsilon \tag{11}$$

1 項目は、被積分関数が $\varepsilon\to\infty$ で 0 になるので、収束することが分かる。2 項目は

$$\frac{1}{\exp[\beta\varepsilon]-1}\le\frac{1}{\beta\varepsilon} \tag{12}$$

だから、

$$\int_0^a \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[\beta\varepsilon]-1}d\varepsilon<\int_0^a \frac{\varepsilon^{1/2}}{\beta\varepsilon}d\varepsilon \tag{13}$$

右辺は計算できて

$$\int_0^a \frac{\varepsilon^{1/2}}{\beta\varepsilon}d\varepsilon=\int_0^a \frac{\varepsilon^{-1/2}}{\beta}d\varepsilon=2\frac{a^{1/2}}{\beta} \tag{14}$$

つまり、

$$\int_0^a \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[\beta\varepsilon]-1}d\varepsilon<2\frac{a^{1/2}}{\beta} \tag{15}$$

したがって、2 項目も発散しない。