

2014 年度統計力学 II 宿題 9 (6 月 12 日出題、6 月 19 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] BEC をおこす理想ボース気体で $D(\varepsilon) = D_0 V \varepsilon^{1/2} (\varepsilon \geq 0)$, $D(\varepsilon) = 0 (\varepsilon < 0)$ の時、 $T < T_c$ の圧力が T^n に比例することを示し、 n を求めよ。

[解答] (実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)

圧力には、 $\varepsilon = 0$ の粒子は寄与しないので、

$$P = -\frac{k_B T}{V} \int_{-\infty}^{\infty} D(\varepsilon) \ln(1 - z e^{-\varepsilon/k_B T}) d\varepsilon \quad (1)$$

与えられている $D(\varepsilon)$ を代入すると

$$= -\frac{k_B T}{V} \int_0^{\infty} D_0 V \varepsilon^{1/2} \ln(1 - z e^{-\varepsilon/k_B T}) d\varepsilon \quad (2)$$

$\varepsilon/k_B T = x$ とすると

$$= -\frac{k_B T}{V} \int_0^{\infty} D_0 V (k_B T x)^{1/2} \ln(1 - z e^{-x}) k_B T dx \quad (3)$$

転移温度以下なので $z = 1$

$$= -\frac{k_B T}{V} \int_0^{\infty} D_0 V (k_B T x)^{1/2} \ln(1 - e^{-x}) k_B T dx \quad (4)$$

整理すると

$$= -(k_B T)^{5/2} D_0 \int_0^{\infty} x^{1/2} \ln(1 - e^{-x}) dx \quad \propto T^{5/2} \quad (5)$$

つまり、 $n = 5/2$

[問題 2.] $T < T_c$ で、圧力に $\varepsilon = 0$ の項が寄与しないことを [問題 1.] の $D(\varepsilon)$ で授業と別の方法で示せ。 $E = C V T^{5/2}$ (C は定数) を導き、それから比熱を求め、 T で積分してエントロピーを出し、ヘルムホルツの自由エネルギーを求めて V で微分して圧力を求めよ。

[解答] BEC が起きている状態を考えるので、 $z = 1$ として、計算すると、

$$E = CVT^{5/2} \quad (6)$$

ここで、

$$C = D_0 k_B^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx \quad (7)$$

定積比熱は、定義から

$$C_v = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \frac{5CV}{2} T^{3/2} \quad (8)$$

熱力学の関係式から

$$C_v = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{NV} \quad (9)$$

だから、熱力学第 3 法則と合せて

$$S = \int_0^T \frac{C_v}{T'} dT' \quad (10)$$

C_v は、 $T^{3/2}$ に比例しているので、

$$= \frac{5}{3} CVT^{3/2} \quad (11)$$

ヘルムホルツの自由エネルギーを F とすると、 $F = E - TS$ だから、(6) 式と (11) 式から

$$F = CVT^{5/2} - T \frac{5}{3} CVT^{3/2} = -\frac{2}{3} CVT^{5/2} \quad (12)$$

圧力 P は、

$$P = - \left(\frac{\partial A}{\partial V} \right)_{NT} = \frac{2}{3} CT^{5/2} \quad (13)$$

一方、グランドカノニカル分布から直接圧力を計算すると、[問題 1.] と同様に、

$$P = \frac{2D_0}{3} (k_B T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx - \frac{k_B T}{V} \ln(1 - z) \quad (14)$$

と変形できるが、右辺の 2 項目は、 $\epsilon = 0$ の寄与を表す。1 項目は、(7) 式から

$$\frac{2D_0}{3}(k_B T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} dx = \frac{2}{3} C T^{5/2} \quad (15)$$

と書けるから、(13) 式と比べれば、(14) 式の右辺第 2 項は 0 になることが分かる。

参考: ランダウ・リフシッツ「統計物理学上」小林秋男他訳(岩波書店)
P228