2015 年度統計力学 II 宿題 13 (7 月 16 日出題、7 月 23 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] (予習)$f(M) = A_0 + A_2M^2 + A_4M^4$ で $A_2 > 0$ と $A_2 < 0$ の場合に $f(M)$ を最小にする M_0 と $f(M_0)$ をすべて求めよ。$A_4 > 0$

[解答](実際の解答にはここまで計算を丁寧に書かなくて良い。)

$f(M)$ の増減を調べるために、微分をとると

$$f'(M) = 2A_2M + 4A_4M^3 = M(2A_2 + 4A_4M^2) \tag{1}$$

(1) $A_2 > 0$ の時:

常に $2A_2 + 4A_4M^2 > 0$ だから

M		0	
$f'(M)$	$-$	0	$+$
$f(M)$	減少	A_0	増加

したがって、$M = 0$ が唯一の極小で、最小。その値は、$f(0) = A_0$ となる。

(2) $A_2 < 0$ の時:

$$M_0 = \sqrt{\frac{-A_2}{2A_4}} \tag{2}$$

とすると $|M| > M_0$ のとき、$2A_2 + 4A_4M^2 > 0$ となり、$|M| < M_0$ のとき、$2A_2 + 4A_4M^2 < 0$ だから、

M		$-M_0$		0		M_0	
$f'(M)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(M)$	減少		増加		減少		増加

したがって、$M = 0$ は極大で、最小は $M = \pm M_0$ になる。関数の値は、

M_0 を代入して

$$f(M_0) = A_0 + A_2\left(\frac{-A_2}{2A_4}\right) + A_4\left(\frac{-A_2}{2A_4}\right)^2 \tag{3}$$

$$= A_0 - \frac{A_2^2}{2A_4} + \frac{A_2^2}{4A_4} \tag{4}$$

$$= A_0 - \frac{A_2^2}{4A_4} \tag{5}$$

[問題 2.] N 個のイジングスピンが環状に並んだ系でハミルトニアンが①と同じとき ($\sigma_i = \pm 1$) $\exp(k\sigma_i\sigma_{i+1}) = \cosh k + \sigma_i\sigma_{i+1}\sinh k$ を使って分配関数を厳密に求めよ。

[解答] 温度を T として $k = J/k_{\mathrm{B}}T$ とすると、分配関数 Z は

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm 1}\exp[-k\sum_i^N \sigma_i\sigma_{i+1}] \tag{6}$$

問題で与えられている関係式から

$$= \sum_{\sigma_1=\pm 1}\cdots\sum_{\sigma_N=\pm 1}\prod_{i=1}^N(\cosh k + \sigma_i\sigma_{i+1}\sinh k) \tag{7}$$

$\prod_{i=1}^N(\cosh k + \sigma_i\sigma_{i+1}\sinh k)$ を計算すると、σ_i が 1 つしか含まれない項は、$\sum_{\sigma_i=\pm 1}$ で消える。残る項は σ_i が含まれないか 2 乗で含まれる項なので、

$$Z = 2^N[(\cosh k)^N + (\sinh k)^N] \tag{8}$$