2015年度統計力学II 宿題4 (5月14日出題、5月21日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題1.] 相対論効果が大きいとき、$\varepsilon_{\vec{\ell}} = c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})|$ が成り立つ。ただし、c は光速、$\vec{k}(\vec{\ell})$ は授業と同じ (周期的境界条件)。$D(\varepsilon)$ を求めなさい。$g = 1$

[解答] この場合も授業で説明したのと同じ様に波数 $\vec{k}(\vec{\ell})$ で1粒子固有関数は特徴づけられる。したがって、やはり波数空間を考えて、1つのエネルギー固有状態を波数空間の1点に対応させる。

$D(\varepsilon)\Delta\varepsilon$ は、ε から $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ にある状態の数だから、0から ε にある状態の数を $N(\varepsilon)$ とすると (記号は似ているけれど、粒子数 N との違いに注意)

$$D(\varepsilon)\Delta\varepsilon = N(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - N(\varepsilon) \approx \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Delta\varepsilon \tag{1}$$

$N(\varepsilon)$ は、授業と同じ様に波数空間の球の中に入っている点の数を数えれば良い。しかし、今回は半径が違って、数えるべき点は $c\hbar|\vec{k}| \le \varepsilon$ を満たす点だから、半径は $\varepsilon/c\hbar$ となる。ε が充分大きければ、半径も大きいので、球面近くの点は内部の点に比べ数が小さい。したがって、これらの点を無視できるので、この球の体積を点の間隔の3乗で割れば、$N(\varepsilon)$ を計算できる。点の間隔は前と同じ $2\pi/L$ だから

$$N(\varepsilon) = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\varepsilon}{c\hbar}\right)^3\left(\frac{V}{8\pi^3}\right) \tag{2}$$

したがって、

$$D(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{4\pi}{(c\hbar)^3}\varepsilon^2\left(\frac{V}{8\pi^3}\right) = \frac{V}{2\pi^2(c\hbar)^3}\varepsilon^2 \tag{3}$$

ただし、$\varepsilon < 0$ で $D(\varepsilon) = 0$ となる。

[問題2.] は締め切り延長