2015 年度統計力学 II 宿題 6 (5 月 28 日出題、6 月 4 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $\mu = \varepsilon_F + C_1 T + C_2 T$ としたとき、$C_1 = 0$、$C_2 = -\frac{\pi^2}{6}\frac{k_B^2}{D(\varepsilon_F)}\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\varepsilon_F}$ *1をまた $E = G(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 D(\varepsilon_F)$ を授業で省いた計算を補って示せ。

[解答] 次の公式

$$\int_0^\infty X(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = \widetilde{X}(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2 \left.\frac{dX(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\mu} \tag{1}$$

を使う。この公式は、T^3 まで正しい。ただし、$X(\varepsilon)$ は T を含まない任意関数で

$$\widetilde{X}(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon X(\varepsilon') d\varepsilon' \tag{2}$$

また、$f(\varepsilon)$ はフェルミの分布関数を表す。

最初は、$N = \int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon)$ を T で展開する。公式で $X(\varepsilon) = D(\varepsilon)$、

$$\widetilde{X}(\mu) = N(\mu) \equiv \int_0^\mu D(\varepsilon') d\varepsilon' \tag{3}$$

とすると、

$$\int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = N(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\mu} \tag{4}$$

次に μ を T で展開する。$\mu = \varepsilon_F + C_1 T + C_2 T^2$ として、

$$N = N(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\, =\, \mu} \tag{5}$$

に代入して、T のベキの係数を計算する。

右辺 1 項目は、

$$N(\varepsilon_F + C_1 T + C_2 T^2) = N(\varepsilon_F) + (C_1 T + C_2 T^2) \left.\frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F} + \frac{(C_1 T + C_2 T^2)^2}{2} \left.\frac{d^2 N(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F} \tag{6}$$

2 項目は、T^2 までで

$$\frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\, =\, \mu} = \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2 \left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F} \tag{7}$$

*1 黒板は k_B^2 ではなくて、k_B となっていました。謹んでお詫びするとともに訂正致します。

2 つを合わせると、

$$N = N(\varepsilon_F) + (C_1 T + C_2 T^2) \left. \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F} + \frac{(C_1 T + C_2 T^2)^2}{2} \left. \frac{d^2 N(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F} + \frac{\pi^2}{6} (k_{\mathrm{B}} T)^2 \left. \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F} \tag{8}$$

この式は恒等式だから T のベキの係数を 0 において、C_1、C_2 を計算する。T の係数から

$$C_1 \left. \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F} = 0 \tag{9}$$

ゆえに $C_1 = 0$

T^2 の係数から

$$C_2 \left. \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F} + \frac{\pi^2}{6} k_{\mathrm{B}}^2 \left. \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F} = 0 \tag{10}$$

ただし、$C_1 = 0$ を使った。C_2 について解くと、

$$C_2 = -\frac{\pi^2}{6} \frac{k_{\mathrm{B}}^2}{D(\varepsilon_F)} \left. \frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F} \tag{11}$$

$E = \int_0^{\varepsilon} \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$ を T で展開する。公式で $X(\varepsilon) = \varepsilon D(\varepsilon)$、

$$\widetilde{X}(\mu) = G(\mu) \equiv \int_0^{\mu} \varepsilon' D(\varepsilon') d\varepsilon' \tag{12}$$

とすると、

$$\int_0^{\infty} \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = G(\mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_{\mathrm{B}} T)^2 \left. \frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon\, =\, \mu} \tag{13}$$

(13) 式は、T のベキの係数が μ で表されているが、問題の式は ϵ_F なので、$\mu = \varepsilon_F + C_2 T^2$ を代入して μ を消去する。C_2 は (11) 式から ϵ_F で表される。ϵ_F は N で表されるので、T の係数のベキを ϵ_F を使って表すと、N で表すことになる。

$$E = G(\varepsilon_F + C_2 T^2) + \frac{\pi^2}{6} (k_{\mathrm{B}} T)^2 \left. \frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F + C_2 T^2} \tag{14}$$

右辺 1 項目は、

$$G(\varepsilon_F + C_2 T^2) = G(\varepsilon_F) + C_2 T^2 \left. \frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon\, =\, \varepsilon_F} \tag{15}$$

2 項目は、T^2 までで

$$\frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2\left.\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F+C_2T^2} = \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2\left.\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \tag{16}$$

あわせて、

$$E = G(\varepsilon_F) + C_2T^2\left.\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2\left.\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \tag{17}$$

　さらに計算を進めると、(12) 式から

$$\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \varepsilon D(\varepsilon) \tag{18}$$

また、(11) 式を代入すると、

$$C_2T^2\left.\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} = -\frac{\pi^2}{6}\frac{k_\mathrm{B}^2}{D(\varepsilon_F)}\left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F}T^2\left.\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F} \tag{19}$$

(18) 式を代入すると、

$$= -\frac{\pi^2}{6}\frac{k_\mathrm{B}^2}{D(\varepsilon_F)}\left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F}T^2\varepsilon_F D(\varepsilon_F) \tag{20}$$

$D(\varepsilon_F)$ が分母分子にあるから、

$$= -\frac{\pi^2}{6}k_\mathrm{B}^2\left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F}T^2\varepsilon_F \tag{21}$$

一方、

$$\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon} = D(\varepsilon) + \varepsilon\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon} \tag{22}$$

だから、(17) 式の 3 項目は、

$$\begin{aligned}&\frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2\left.\frac{d(\varepsilon D(\varepsilon))}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F}\\ &\qquad = \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2\,\varepsilon\left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F}\end{aligned} \tag{23}$$

全部足すと、

$$\begin{aligned}E = {}& G(\varepsilon_F) - \frac{\pi^2}{6}k_\mathrm{B}^2\left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F}T^2\varepsilon_F\\ &+ \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2D(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_\mathrm{B}T)^2\,\varepsilon_F\left.\frac{dD(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=\varepsilon_F}\end{aligned} \tag{24}$$

2 項目と 4 項目がキャンセルして

$$E = G(\varepsilon_F) + \frac{\pi^2}{6}(k_{\mathrm{B}}T)^2 D(\varepsilon_F) \tag{25}$$

[問題 2.] プリント「授業ノート 1」の (34) 式から (35) 式を導く条件から μ と最低準位 ε_0 の関係を示せ。

[解答] 「授業ノート 1」でやったように、大分配関数は、$\Xi = \prod_l \Xi_l$ のように書ける。Ξ_l は、ボース粒子の場合、プリントの (16) 式

$$\Xi_l = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ze^{-\beta\varepsilon_l}\right)^n \tag{26}$$

で表せる。これは、無限等比級数で、収束するためには、

$$ze^{-\beta\varepsilon_l} < 1 \tag{27}$$

$z = \exp[\beta\mu]$ だから、$\beta > 0$ を使って、

$$\mu - \varepsilon_l < 0 \tag{28}$$

これはすべてのエネルギー準位 ε_l で、成り立たなければならない。

　もし、箱に入った自由粒子のようにエネルギー準位に最小がある時は、その値を ε_0 とすると、

$$\mu < \varepsilon_0 \tag{29}$$

であれば、$\varepsilon_0 \le \varepsilon_l$ だから、全てのエネルギー準位で、(28) 式を満たす。