2015 年度統計力学 II 宿題 7 (6 月 4 日出題、6 月 11 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $\varepsilon_{\vec{\ell}} = c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})|$ のとき、授業で説明したのと同じように $b(\varepsilon_{\vec{\ell}})/V << N/V$ を示せ ($\vec{\ell} \neq 0$)。

[解答] 授業と同じように、N/V を一定にして、$N \to \infty$、$V \to \infty$ の極限で調べる。ここで、N と V は全粒子数と体積を表す。

$b(\varepsilon_{\vec{\ell}})$ の式を代入すると、

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} = \frac{1}{V}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}}/z - 1} \tag{1}$$

$z < 1$ だから

$$< \frac{1}{V}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}} - 1} \tag{2}$$

$V = L^3$ だから $V \to \infty$ は $L \to \infty$ と同じだから、$L \to \infty$ とすると、$|\vec{k}|$ は小さくなり、$\varepsilon_{\vec{\ell}}$ も小さくなる。指数関数をテーラー展開すると、

$$\xrightarrow{L\to\infty} \frac{1}{V}\frac{1}{\beta\varepsilon_{\vec{\ell}}} \tag{3}$$

$V = L^3$ と問題の $\varepsilon_{\vec{\ell}}$ を代入すると、

$$= \frac{1}{L^3}\frac{1}{\beta}\left\{c\hbar|\vec{k}(\vec{\ell})|\right\}^{-1} \tag{4}$$

$$= \frac{1}{L^3}\frac{1}{\beta}\left\{c\hbar\frac{2\pi|\vec{\ell}|}{L}\right\}^{-1} \tag{5}$$

$$\propto \frac{1}{L^2} \xrightarrow{L\to\infty} 0 \tag{6}$$

つまり、N/V を一定にして、$L \to \infty$ にすると、

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} \to 0 \tag{7}$$

ただし、$\vec{\ell}=0$ は除く。この極限では、N/V を一定なので、$\varepsilon_{\vec{\ell}}>0$ で

$$\frac{b(\varepsilon_{\vec{\ell}})}{V} << \frac{N}{V} \tag{8}$$

が満たされることが分る。

[問題 2.] $D(\varepsilon) \propto \varepsilon^{1/2}$ のとき、$\int_0^\infty D(\varepsilon)b(\varepsilon)d\varepsilon$[*1]が $z \to 1$ で発散しないことを示せ。ただし、$b(\varepsilon)$ はボース分布。

[解答] $b(\varepsilon)$ は、

$$b(\varepsilon) = \frac{1}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} \tag{9}$$

だから、$z=1$ にして、$\int_0^\infty D(\varepsilon)b(\varepsilon)d\varepsilon$ に $D(\varepsilon) \propto \varepsilon^{1/2}$ を代入すると、

$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[\beta\varepsilon]-1}d\varepsilon \tag{10}$$

この積分が発散しないことを示せば良い。

積分の下限に注目すると、ε は充分小さいから $\exp[\beta\varepsilon] = 1 + \beta\varepsilon + \cdots$ で、$(\exp[\beta\varepsilon]-1) \sim \beta\varepsilon$となり、被積分関数は、$\varepsilon^{-1/2}$ に比例する。このような被積分関数を 0 から積分しても発散しないことが知られている。

もう少し正確に証明する。充分小さい $a>0$ に対して、積分区間を分けると

$$\int_a^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[\beta\varepsilon]-1}d\varepsilon + \int_0^a \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[\beta\varepsilon]-1}d\varepsilon \tag{11}$$

1 項目は、被積分関数が $\varepsilon \to \infty$ で 0 になるので、収束することが分かる。2 項目は

$$\frac{1}{\exp[\beta\varepsilon]-1} \leq \frac{1}{\beta\varepsilon} \tag{12}$$

だから、

$$\int_0^a \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[\beta\varepsilon]-1}d\varepsilon < \int_0^a \frac{\varepsilon^{1/2}}{\beta\varepsilon}d\varepsilon \tag{13}$$

[*1] 黒板は積分の下限が $-\infty$ でしたが、0 の間違えです。謹んでお詫びするとともに訂正致します。

右辺は計算できて

$$\int_0^a \frac{\varepsilon^{1/2}}{\beta\varepsilon} d\varepsilon = \int_0^a \frac{\varepsilon^{-1/2}}{\beta} d\varepsilon = 2\frac{a^{1/2}}{\beta} \tag{14}$$

つまり、

$$\int_0^a \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[\beta\varepsilon] - 1} d\varepsilon < 2\frac{a^{1/2}}{\beta} \tag{15}$$

したがって、2 項目も発散しない。