2015 年度統計力学 II 宿題 8 (6 月 11 日出題、6 月 18 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $B_1(1) > 1$ のとき z が T の減少関数になる事を示せ。

[解答] $B_1(1) > 1$ なので、$\epsilon_l = 0$ の粒子は無視できる。その時、z は

$$B_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\epsilon) \frac{D(\epsilon)}{N} d\epsilon = 1 \tag{1}$$

の方程式を解いて求める。ここで、$b(\epsilon)$ はボース分布

$$b(\epsilon) = \frac{1}{\exp[\epsilon/k_{\rm B}T]/z - 1} \tag{2}$$

を表す。$B_1(z)$ は T にもよるので、$B_1(z) = f(z, T)$ とすると、(1) 式は、

$$f(z, T) = 1 \tag{3}$$

と書ける。

(2) 式から、$f(z, T)$ は z に対しても T に対しても、増加関数になる。したがって、T を増やすと、(3) 式を満たす z は減少する。

[問題 2.] 2 次元平面に閉じ込められたボース粒子の BEC はどうなるか？ ただし、$D(\varepsilon) = \begin{cases} D_0(\text{定数}), & \varepsilon > 0 \\ 0, & \varepsilon \leq 0 \end{cases}$ を使ってよい。

[解答] 授業で説明した様に、与えられた粒子数 N と温度 T のもとで、絶対活動度 z は、

$$B(z) \equiv \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\varepsilon)}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} d\varepsilon + \frac{1}{N} \frac{z}{1-z} = 1 \tag{4}$$

を解くことで得られる。ここで、$\beta = 1/(k_{\rm B}T)$ を表す。$z/(1-z)$ は、$z \to 1$ で発散するのは今までと同じ。

3 次元と違うのは、$B(z)$ の第 1 項についてで、問題で与えられている状態密度を代入すると、

$$\frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\varepsilon)}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} d\varepsilon = \frac{1}{N} \int_{0}^{\infty} \frac{D_0 d\varepsilon}{\exp[\beta\varepsilon]/z - 1} \tag{5}$$

この積分は $z \to 1$ で発散する。なぜなら、積分の下限に注目すると、ε は充分小さいから $\exp[\beta\varepsilon] = 1 + \beta\varepsilon + \cdots$ で、$(\exp[\beta\varepsilon] - 1) \sim \beta\varepsilon$となり、被積分関数は、$\varepsilon^{-1}$ に比例する。このような被積分関数を 0 から積分すると対数で発散することが知られている。

3 次元の場合は、z が 1 から充分離れていれば、第 2 項は $1/N$ に比例するので、充分小さくなり無視できる。しかし、z が 1 に近づいてくると、第 2 項は発散するので無視できなくなる。これがボース-アインシュタイン凝縮。

ところが、2 次元の場合は、第 1 項も $z \to 1$ で発散するので、すべての z の値で第 2 項より第 1 項が大きくなり、常に第 2 項を無視できる。したがって、ボース-アインシュタイン凝縮は起こらない。