2015 年度統計力学 II 宿題 9 (6 月 18 日出題、6 月 25 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] $\varepsilon > 0, D(\varepsilon) = D_0 V \varepsilon^{\frac{1}{2}}$($V$ は体積) $\varepsilon \leq 0, D(\varepsilon) = 0$ の時、$x = \beta\epsilon$ と変数変換して

① T_B が $D_0^{-\frac{2}{3}}$ に比例することを示せ。
② $T < T_B$ で $B_1(1) < 1$ を示せ。
③ $T < T_B$ のとき $\varepsilon > 0$ と $\varepsilon = 0$ の粒子数 N_e と N_0 を全粒子数 N と T、T_B で表せ。
④ $T < T_B$ の圧力が T^n に比例することを示し、n を求めよ。

[解答] ① T_B は

$$B_1(1) = \int_{-\infty}^{\infty} b(\epsilon) \frac{D(\epsilon)}{N} d\epsilon = 1 \tag{1}$$

の条件を満たす温度として定義されている。ここで、$b(\epsilon)$ はボース分布を表し、ただし、$z = 1$、$T = T_B$、つまり

$$b(\epsilon) = \frac{1}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T_B] - 1} \tag{2}$$

問題で与えられている $D(\epsilon)$ を代入すると、

$$\int_0^{\infty} \frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T_B] - 1} \frac{D_0 V \epsilon^{1/2}}{N} = 1 \tag{3}$$

$\epsilon/k_{\mathrm{B}}T_B = x$ として変数変換する。$dx = d\epsilon/k_{\mathrm{B}}T_B$ だから、

$$\int_0^{\infty} \frac{k_{\mathrm{B}}T_B dx}{\exp[x] - 1} \frac{D_0 V (k_{\mathrm{B}}T_B x)^{1/2}}{N} = 1 \tag{4}$$

$k_{\mathrm{B}}T_B$ をくくりだすと、

$$(k_{\mathrm{B}}T_B)^{3/2} D_0 \frac{V}{N} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{\exp[x] - 1} = 1 \tag{5}$$

したがって、T_B について解くと、

$$T_B = k_{\mathrm{B}}^{-1}\left\{D_0\frac{V}{N}I\right\}^{-2/3} \tag{6}$$

ここで、

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} \tag{7}$$

とした。I は V にも N にも依らない定数を表す。

② $T \neq T_B$ の時は、

$$B_1(1) = (k_{\mathrm{B}}T)^{3/2}D_0\frac{V}{N}I = \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \tag{8}$$

だから、$T < T_B$ の時は、$B_1(1) = (T/T_B)^{3/2} < 1$ が成り立つ。それゆえ、$T < T_B$ で BEC が起こると言える。

③ 粒子数 N は温度 T と化学ポテンシャル μ で表すと、

$$N = \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[(\epsilon-\mu)/k_{\mathrm{B}}T]-1} + N_0 \tag{9}$$

$T < T_B$ では、$\mu = 0$ だから

$$N = \int D(\epsilon)\frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T]-1} + N_0 \tag{10}$$

$D(\epsilon)$ に与えられた式を代入すると

$$N = \int D_0V\epsilon^{1/2}\frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T]-1} + N_0 \tag{11}$$

右辺の 1 項目が $\epsilon > 0$ の粒子数、つまり N_e、2 項目が $\epsilon = 0$ の粒子数だから、

$$N_e = \int D_0V\epsilon^{1/2}\frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T]-1} \tag{12}$$

$$N_0 = N - \int D_0V\epsilon^{1/2}\frac{d\epsilon}{\exp[\epsilon/k_{\mathrm{B}}T]-1} \tag{13}$$

(12) 式と (13) 式に対して (4) 式と、同様の変数変換をすると、

$$N_e = D_0 V (k_{\rm B}T)^{3/2} \int \frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} \tag{14}$$

$$N_0 = N - D_0 V (k_{\rm B}T)^{3/2} \int \frac{x^{1/2}dx}{\exp[x]-1} \tag{15}$$

(6) 式を使うと、

$$N_e = N(k_{\rm B}T_B)^{-3/2}(k_{\rm B}T)^{3/2} = N\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \tag{16}$$

$$N_0 = N - N(k_{\rm B}T_B)^{-3/2}(k_{\rm B}T)^{3/2} = N - N\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \tag{17}$$

④ 圧力には、$\varepsilon = 0$ の粒子は寄与しないので、

$$P = -\frac{k_{\rm B}T}{V}\int_{-\infty}^{\infty} D(\varepsilon)\ln(1 - ze^{-\varepsilon/k_{\rm B}T})d\varepsilon \tag{18}$$

与えられている $D(\varepsilon)$ を代入すると

$$= -\frac{k_{\rm B}T}{V}\int_{0}^{\infty} D_0 V \varepsilon^{1/2}\ln(1 - ze^{-\varepsilon/k_{\rm B}T})d\varepsilon \tag{19}$$

$\varepsilon/k_{\rm B}T = x$ とすると

$$= -\frac{k_{\rm B}T}{V}\int_{0}^{\infty} D_0 V (k_{\rm B}Tx)^{1/2}\ln(1 - ze^{-x})k_{\rm B}T dx \tag{20}$$

転移温度以下なので $z = 1$

$$= -\frac{k_{\rm B}T}{V}\int_{0}^{\infty} D_0 V (k_{\rm B}Tx)^{1/2}\ln(1 - e^{-x})k_{\rm B}T dx \tag{21}$$

整理すると

$$= -(k_{\rm B}T)^{5/2} D_0 \int_{0}^{\infty} x^{1/2}\ln(1 - e^{-x})dx \qquad \propto T^{5/2} \tag{22}$$

つまり、$n = 5/2$

[問題 2.] $T < T_B$ で、圧力に $\varepsilon = 0$ の粒子が寄与しないことを文献を調べて示しなさい。

[解答] $\varepsilon = 0$ の粒子が寄与する圧力の値は、

$$P_0 = -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V}\ln(1-z) \tag{23}$$

で与えられる。ここで、z はいつもの量で、$z = e^{\beta\mu}$ で定義される。μ は化学ポテンシャル。N/V 一定で、$N \to \infty$、$V \to \infty$ の極限で P_0 の大きさを調べる。そのまま代入すると、不定。

BEC では、$N_0 \approx N$ だからこの極限に対して N/V が一定なら N_0/V も一定。$n_0 = N_0/V$ として、

$$N_0 = \frac{1}{1/z - 1} \tag{24}$$

を変形

$$1 - z = \frac{1}{n_0 V + 1} \tag{25}$$

これを P_0 の式に代入

$$\begin{aligned}\lim_{V\to\infty} P_0 &= \lim_{V\to\infty}\{-\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V}\ln(1-z)\} &(26)\\ &= \lim_{V\to\infty}\{-\frac{k_{\mathrm{B}}T}{V}\ln\frac{1}{n_0V+1}\} = 0 &(27)\end{aligned}$$