

2005 年度統計力学 II 宿題の問題

2005.7.11 担当 吉森 明

1 番の問題 (重要)

4 月 11 日出題、18 日提出 与えられたエネルギー準位  $\epsilon_k$  に対して、(マクスウェル) ボルツマン統計が成り立たなくなる温度を化学ポテンシャル  $\mu$  とボルツマン定数  $k_B$  で表せ。( $\epsilon_k \gg \mu$ )

4 月 18 日出題、4 月 25 日提出 1 粒子のエネルギー固有状態が 3 個ある 3 準位系 (統計力学 I 試験問題参照) を考える。それぞれの状態のエネルギー固有値は、 $0, \epsilon, 2\epsilon$  で、粒子はたがいに相互作用していない理想気体とする。

(a) 温度  $T$  の熱溜に接しているとし、粒子がフェルミ統計、ボーズ統計、ボルツマン統計に従う場合のカノニカル分布における分配関数をそれぞれ求めなさい。ただし、粒子数は  $N = 3$  する。

(b) さらに、化学ポテンシャルを  $\mu$  の粒子溜めに接するとして、グランドカノニカル分布の大分配関数を求めなさい。ただし、 $\mu < 0$  とする。

4 月 25 日出題、5 月 9 日提出 2 原子分子の振動を調和振動子と仮定すると、1 粒子のエネルギー固有値は、 $\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega$  となる。1 粒子の分配関数を求め、低温で展開して比熱を求めなさい。

5 月 9 日出題、5 月 16 日提出  $\text{H}_2$  分子の  $j_{\text{rot-nu}}(T)$  を  $r_o$  と  $r_e$  で表せ。オルソ分子とパラ分子の個数比と比熱を、(8.10) から (8.12) のように低温で展開して、2 項目まで求めよ。

5 月 16 日出題、5 月 23 日提出 教科書演習問題 p144[6] を解きなさい。ただし容器は立方体とする。

5 月 23 日出題、5 月 30 日提出  $D(\epsilon) = D_0\epsilon^n (n > -1)$  のとき、 $E$  と  $PV$  の関係を求めなさい。

5 月 23 日出題、6 月 6 日提出  $C_V$  と  $P$ 、ヘルムホルツの自由エネルギー  $A$ 、エントロピー  $S$  を低温で展開して  $T^2$  まで求めなさい。ただし、状態密度は、教科書 P135 の (9.10) を使う。

5 月 30 日出題、6 月 6 日提出 相転移の例をあげ、それが何次の相転移か答えなさい。不連続あるいは発散する量は何か？

6 月 6 日出題、6 月 13 日提出 授業で説明したことを使って、与えられた  $N, V$  に対して転移温度を求めなさい。

6月13日出題、6月20日提出 ①  $T > T_c$  で  $\mu$  を  $T_c$  の周りで展開し、 $(T - T_c)^2$  まで求めよ。

訂正 1: 授業では、 $\mu$  の展開を

$$(誤) \quad \mu = -\frac{9}{4} \frac{k_B T_c}{\tilde{b}^2} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^2 \quad (1)$$

と書きましたが、これは間違っていました。(次元も合いません。) 正しくは、

$$(正) \quad \mu = -\frac{9}{4} \frac{k_B T_c \lambda_{T_c}^6}{\tilde{b}^2} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \left(\frac{\Delta T}{T_c}\right)^2 \quad (2)$$

です。謹んでお詫び申し上げます。

訂正 2: 授業で、 $z$  が 1 に近い時、

$$(誤) \quad b_{3/2}(z) \approx b_{3/2}(1) + \tilde{b}(z - 1)^{1/2} \quad (3)$$

と書きましたが、これも間違いです。 $(\mu < 0$  なので、 $z < 1$  だから、このままだとルートの中が負になります。) 正しくは、

$$(正) \quad b_{3/2}(z) \approx b_{3/2}(1) + \tilde{b}(1 - z)^{1/2} \quad (4)$$

です。いくつも間違っただけで本当に申し分けありません。

②  $T < T_c$  の時の  $S$  を求めなさい。

6月20日出題、7月4日提出 完全反射の時、 $\mathbf{k} = (\pi/L)\mathbf{n}$  ( $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots \geq 0$ ) となるが、このときの光の  $D(\omega)$  を求めなさい。

6月27日出題、7月4日提出 デバイモデル (10.51) で、エネルギーが高温では  $T$  に、低温では  $T^4$  に比例することを示せ。

7月4日出題、7月11日提出 ① 教科書 p185、演習問題 [4] を解け。

②  $f(M) = A_0 + A_2 M^2 + A_4 M^4$  で、 $A_2$  が正と負のそれぞれの場合に、 $f(M)$  を最小にする  $M = M_0$  と  $f(M_0)$  をすべて求めよ。

2 番の問題 (余裕があれば解くこと)

4月11日出題、18日提出 理想気体と考えることの出来る系を授業で説明したもの以外に挙げなさい。

4月18日出題、4月25日提出 ルジャンドル多項式の定義から、 $\hat{l}^2$  の固有値が  $2l + 1$  個に縮退していることを示せ。

- 4月25日出題、5月9日提出 教科書演習問題 p131[1] のハミルトニアンで、異核2原子分子の比熱を古典論で求めなさい。
- 5月9日出題、5月16日提出 教科書演習問題 p131[2] を解け。さらに低温で展開するとどうなるか。[3] はどうなるか？
- 5月16日出題、5月23日提出 教科書演習問題 p143[1] を解きなさい。
- 5月23日出題、5月30日提出 教科書演習問題 p144[5] を解きなさい。
- 5月30日出題、6月6日提出 気体と液体の間には臨界点がある。何次の相転移か考えなさい。
- 6月6日出題、6月13日提出 2次元平面の正方格子で BEC はどうなるか？
- 6月13日出題、6月20日提出 教科書 p160 の演習問題 1 を解きなさい。
- 6月20日出題、6月27日提出  $N/V - \mu$  曲線を  $T$  を変えてグラフに書き、教科書 p150、(10.26) 式の  $T_c$  で BEC が起こることを説明しなさい。
- 6月27日出題、7月4日提出 (10.51) はどういう考えに基づいているかを説明しなさい。特に  $\omega$  が小さいところでは厳密なことを示せ。(文献を調べよ。)
- 7月4日出題、7月11日提出 教科書 p185、演習問題 [3] を解け。