2010 年度 統計力学 II 問題

制限時間 90 分 担当 吉森 明

問題用紙 3 枚、解答用紙 2 枚 (裏を使っても良い)。解答用紙が足りないときは、申し出れば 3 枚以上使える。3 枚以上使った場合は、解答用紙の 1 枚目に何枚使ったかを書くこと。全ての解答用紙に学籍番号と名前を書きなさい。解答は、式変形の途中も書くこと。

注意: 小テストの得点は、約 1.1 倍して加点する。ただし、第 1 回小テストは大問の 1.、第 2 回小テストは大問の 2.、第 3 回小テストは大問の 3. の配点以上には加点しない。したがって、うまくいかなかった小テストに対応する問題を中心に解く方が得点は増えます。

すべての問題で、$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの (解答にはプランク定数ではなく $\hbar$ を使いなさい)、$k_{\rm B}$ は、ボルツマン定数を表し、T は温度、$\beta \equiv 1/(k_{\rm B}T)$ とする。また、V は体積、N は粒子数で、V も N も充分大きく、$1/V$ や $1/N$ は無視する。N/V は無視しない。1 粒子の状態は密に詰まっている。特に断りがなければ平衡状態を考える。

1. 状態密度 $D(\epsilon)$ が内部自由度を含めて

$$D(\epsilon) = \begin{cases} V\nu & \epsilon \geq 0 \\ 0 & \epsilon < 0 \end{cases} \tag{1}$$

で与えられている理想フェルミ気体を考える ($\nu > 0$)。ここで、ν は ϵ によらない定数を表す。グランドカノニカル分布を使って、次の問いに答えなさい。

(a) $T = 0$ において、化学ポテンシャル (フェルミエネルギー) ϵ_F を求めなさい。また、$T = 0$ での系の全エネルギー E を N、ϵ_F で表しなさい。さらに、$T = 0$ における圧力 P を V、N、ϵ_F で表しなさい。ただし、圧力を求めるのに

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} \tag{2}$$

の公式を使った場合、エントロピー S をなぜ一定と考えて微分が出来るか説明しなさい。

(b) $T > 0$ の時、化学ポテンシャル μ を求めなさい。必要なら $(e^x + 1)^{-1}$ の不定積分が $-\ln[e^{-x} + 1]$ となることを使っても良い。

2. 光子と理想ボース気体について以下の問いに答えなさい。

(a) 光子に関するシュテファン-ボルツマン則 ($u = \sigma T^4$) について、σ の具体的な形を求めなさい。ここで、u は単位体積あたりの全エネルギーで、σ は温度によらないある定数を表す。σ の具体的な形には光速 c を使え。

(b) 状態密度が問題 1 の (1) 式で与えられる理想ボース気体をグランドカノニカル分布を使って考える。ボース-アインシュタイン凝縮が起こる温度以下で、エネルギー E_B が T 一定のもとで V^n に比例するとき、n を求めなさい。

必要なら次の公式を使って良い。

$$\omega = c|\mathbf{k}(\boldsymbol{l})| \tag{3}$$

$$\mathbf{k}(\boldsymbol{l}) = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{l}, \qquad L^3 = V \qquad \boldsymbol{l} = (l_x, l_y, l_z), \qquad l_x, l_y, l_z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \tag{5}$$

3. ボース粒子からなる等核 2 原子分子をカノニカル分布で考える。分子は、慣性モーメント I を持った剛体回転子とする。

(a) 分子 1 個の、回転とスピンの分配関数 j は、$j = z_S r_e + z_A r_o$ と書ける事を、量子論に基づき説明しなさい。ただし、スピンの固有関数について、粒子を入れかえた時に符号が変わらないものから計算した分配関数を z_S、変わるものから計算した分配関数を z_A とし、回転についても同様に r_e、r_o を定義する。

(b) 分子 1 個の回転運動のエネルギー準位は、方位量子数 ℓ を使って、

$$\epsilon_\ell = \frac{\hbar^2}{2I}\ell(\ell+1) \qquad (\ell = 0, 1, 2, \dots) \tag{6}$$

で与えられ、その縮退度は $2\ell + 1$ である。r_e を求めよ。

4. 磁場のかかったハミルトニアン

$$H = -\sum_{(i,j)} J\sigma_i\sigma_j - \sum_i h\sigma_i \tag{7}$$

で表される格子の上に並んだスピン系がある ($J > 0$)。和 $\sum_{(i,j)}$ は、隣り合う格子の組についてとる。各格子点にあるスピンは、$\sigma_i = -1, 1$ の 2 つの状態をとるものとして、カノニカル分布に対する平均場近似を使って、以下の問いに答えなさい。

(a) σ_i の平均値は i によらないので、$\langle\sigma\rangle$ と書くことにする。温度 T の時の $\langle\sigma\rangle$ に対する平均場近似の式を $\langle\sigma\rangle = f(\langle\sigma\rangle, h)$ の形で導きなさい。隣り合う格子の数は z とする。ここで、$f(\langle\sigma\rangle, h)$ は、$\langle\sigma\rangle$ と h のある 2 変数関数を表す。

（b）(a) で求めた $f(\langle\sigma\rangle, h)$ を $\langle\sigma\rangle$ と h が小さいとして、$\langle\sigma\rangle^3$ および h^1 までテーラー展開すると、

$$f(\langle\sigma\rangle, h) = f_1 \langle\sigma\rangle - f_3 \langle\sigma\rangle^3 + f_h h \tag{8}$$

が得られる。f_1、f_3、f_h を求めなさい。ただし、$x << 1$ の x に対して

$$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 \cdots \tag{9}$$

となることを使っても良いが、x を使ってはいけない

（c）(8) 式を使ってランダウ自由エネルギー $F(M,T)$ を次のように定義する。

$$F(M,T) = \frac{(1-f_1)}{2f_h}M^2 + \frac{f_3}{4f_h}M^4 - hM \tag{10}$$

この $F(M,T)$ のもとでは、$T < T_c = zJ/k_\mathrm{B}$ の時、実現する M は h を正の値から減らしていくと $h=0$ で不連続に変化する。つまり、$h=0$ で M がとびを示すが、このとびを求めなさい。もし、(b) が出来なければ、解答に f_1、f_3、f_h を使っても良いが、出来る限り J、z、β 等を使いなさい。

ヒント: $F(M,T)$ は充分小さい h では、$T < T_c$ で 2 つ極小を持ち、その極小を $M_1(h)$、$M_2(h)(M_1(h) < M_2(h))$ とすると、h の 1 次のオーダーで

$$F(M_\alpha(h),T) = -hM_\alpha(0) + C \qquad \alpha = 1,2 \tag{11}$$

が成り立つ。ここで、C は α によらない定数を表す。