# 2012 年度前期
# 統計力学 II 期末試験問題

担当: 吉森

2012 年 7 月 26 日

**注意事項**

- 「初め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
- 問題用紙は、このページを含めて全部で 4 ページある。
- 問題は、1.〜5. まである。全て解くこと。
- 解答用紙は 2 枚だが、足りない場合は挙手すれば、追加できる。3 枚以上使った場合は、解答用紙の 1 枚目に何枚使ったかを書くこと。追加した分も含め解答用紙全てに、学生番号および氏名を書くこと。
- 解答は全て解答用紙に書くこと。解答用紙の裏面を使っても良い。
- 途中の計算も書くこと。最終的な解答しか書いていない時、減点される場合がある。

**注意:** 小テストの得点は、約 1.4 倍して加点する。ただし、第 1 回小テストは大問の 1.、第 2 回小テストは大問の 2.、第 3 回小テストは大問の 3. と 4. の配点以上には加点しない。したがって、うまくいかなかった小テストに対応する問題を中心に解く方が得点は増えます。

すべての問題で、$\hbar$ はプランク定数を $2\pi$ で割ったもの (解答にはプランク定数ではなく $\hbar$ を使いなさい)、$k_{\mathrm{B}}$ は、ボルツマン定数を表し、$T$ は温度、$\beta \equiv 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ とする。また、$V$ は体積、$N$ は粒子数、$\mu$ は化学ポテンシャルで、特に指定がなければ、解答にこれらの記号を自由に使って良い。$V$ も $N$ も充分大きく、$1/V$ や $1/N$ は無視する。$N/V$ は無視しない。1 粒子の状態は密に詰まっている。特に断りがなければ平衡状態を考える。

1. 1 辺が $L$ の 3 次元内の立方体に閉じ込められた理想フェルミ気体を考える。
   (a) 1 粒子エネルギー固有値が
   $$\epsilon_{\boldsymbol{l}} = A|\mathbf{k}(\boldsymbol{l})|^a \tag{1}$$
   となることが分っている。ただし、$A > 0$、$0 < a \leq 3$ で、波数ベクトル $\mathbf{k}(\boldsymbol{l})$ は、
   $$\mathbf{k}(\boldsymbol{l}) = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{l}, \qquad \boldsymbol{l} = (l_x, l_y, l_z), \qquad l_x, l_y, l_z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{2}$$
   で与えられる。この系の状態密度 $D(\epsilon)$ が
   $$D(\epsilon) = VD_0\epsilon^n, \qquad \epsilon \geq 0 \tag{3}$$
   と表せるとき、$D_0$ と $n$ を求めなさい。また、$\epsilon < 0$ のとき、$D(\epsilon)$ はどうなるか。ただし、内部自由度は無視する。
   (b) フェルミエネルギー (絶対零度の時の化学ポテンシャル)$\epsilon_F$ を求めなさい。ただし、$D_0$ と $n$ を使っても良い。$a$ や $A$ は使ってはいけない。
   (c) 絶対零度における系の全エネルギー $E$ と圧力 $P$ を、$\epsilon_F$、$n$、$V$、$N$ の中から適当に記号を選び表しなさい。$a$、$A$ や $D_0$ は使ってはいけない。ただし、圧力を求めるのに
   $$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{S,N} \tag{4}$$
   の公式を使った場合、エントロピー $S$ をなぜ一定と考えて微分が出来るか説明しなさい。

2. 問題 1 と同じ状態密度が (3) 式で与えられる理想ボース気体を考える。以下の問いに $a$ や $A$ を使わずに、$n$ と $D_0$ などを使って答えなさい。また、次の公式を使っても良い。
   $$N = \sum_{l} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_l - \mu)} - 1} \tag{5}$$

(a) $n > 0$ のときボース-アインシュタイン凝縮が起こる温度 $T_B$ を求めなさい。ただし、

$$\eta(y) \equiv \int_0^\infty \frac{x^{y-1}}{e^x - 1} dx \tag{6}$$

で定義される関数 $\eta(y)$ を使ってもよい。ここで、$y$ は $n$ で表される。

(b) $n = 0$ のときボース-アインシュタイン凝縮は起こらない。$n = 0$ のときの $\mu$ を $T$ と $N$ の関数として求めなさい。この問題では $\eta(y)$ は使ってはならない。必要なら $(e^x - 1)^{-1}$ の不定積分が $\ln[1 - e^{-x}]$ となることは使っても良い。

3. 光子の状態密度は角振動数 $\omega$ の関数として

$$D(\omega) = \begin{cases} \dfrac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 & \omega \geq 0 \\ 0 & \omega < 0 \end{cases} \tag{7}$$

と与えられる。ここで、$c$ は光速を表す。グランドカノニカル分布を使って、エネルギーを求めなさい。ただし、(6) 式で定義された $\eta(y)$ について、$\eta(4) = \pi^4/15$ となることを使っても良い。

4. 水素分子の内部エネルギーを量子論的にカノニカル分布で考える。分子は慣性モーメント $I$ を持った剛体回転子とし、$\Theta = \hbar^2/(2Ik_{\mathrm{B}})$ とすると、温度 $T$ が $T << \Theta$ の時 (低温の極限)、分子 1 個あたりの内部エネルギーに対する回転とスピンの寄与 $e$ は、$Ak_{\mathrm{B}}\Theta \exp[-B\Theta/T]$ の項の和で書ける。それらの中から絶対値が最も大きいものから 2 つ書くと、

$$e = A_1 k_{\mathrm{B}}\Theta \exp[-2\frac{\Theta}{T}] + A_2 k_{\mathrm{B}}\Theta \exp[-4\frac{\Theta}{T}] + \cdots \tag{8}$$

となる。実数 $A_1$、$A_2$ を求めよ。ここで、水素原子はフェルミ粒子、 回転運動のエネルギー準位は、

$$\epsilon_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

で与えられ、その縮退度は $2l + 1$ と書ける。また、スピンの固有関数が原子の入れかえに対して符号を変えないものを $z_S$、変えるものを $z_A$ とすると、水素分子は $z_S = 3$、$z_A = 1$ と計算できる。さらに、エネルギー $E$ は、

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln j \tag{10}$$

また、$x << 1$ となる $x$ について

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots \tag{11}$$

となることを使ってもよい。(解答に $x$ を使ってはいけない。)

5. 次のハミルトニアン

$$H = -\sum_{(i,j)} J\sigma_i\sigma_j \tag{12}$$

で表される格子の上に並んだスピン系がある $(J > 0)$。和 $\sum_{(i,j)}$ は、隣り合う格子の組についてとる。各格子点にあるスピンは、$\sigma_i = -1, 0, 1$ の 3 つの状態をとるものとして、カノニカル分布に対する平均場近似を使って、相転移が起こる温度 $T_c$ を次の様に求めなさい。ただし、隣り合う格子の数は $z$ とする。

(a) $\sigma_i$ の平均値は $i$ によらないので、$\langle\sigma\rangle$ と書くことにする。温度 $T$ の時の $\langle\sigma\rangle$ に対する平均場近似の式を $\langle\sigma\rangle = f(\langle\sigma\rangle)$ の形で導きなさい。ここで、$f(\langle\sigma\rangle)$ は $\langle\sigma\rangle$ のある関数を表す。

(b) 前問で求めた $f(\langle\sigma\rangle)$ を $\langle\sigma\rangle$ が小さいとして、$\langle\sigma\rangle^3$ までテーラー展開すると、

$$f(\langle\sigma\rangle) = f'(0)\langle\sigma\rangle + \frac{f'''(0)}{3!}\langle\sigma\rangle^3 \tag{13}$$

が得られる。ここで、$f'(0)$、$f'''(0)$ は、$\langle\sigma\rangle = 0$ の時の、$f(\langle\sigma\rangle)$ の 1 階微分と 3 階微分を表す。(13) 式を使ってランダウ自由エネルギー $F(M,T)$ を次のように定義する。

$$F(M,T) = \frac{1-f'(0)}{2}M^2 - \frac{f'''(0)}{4!}M^4 \tag{14}$$

相転移が起こる温度 $T_c$ を求めなさい。