

2013 年度前期 統計力学 II 期末試験問題

担当: 吉森

2013 年 8 月 1 日

注意事項

- 「初め」の合図があるまで問題用紙を開かないこと。
- 問題用紙は、このページを含めて全部で 4 ページある。
- 問題は、1. ~ 4. までである。全て解くこと。
- 解答用紙は 2 枚だが、足りない場合は挙手すれば、追加できる。3 枚以上使った場合は、解答用紙の 1 枚目に何枚使ったかを書くこと。追加した分も含め解答用紙全てに、学生番号および氏名を書くこと。
- 解答は全て解答用紙に書くこと。解答用紙の裏面を使っても良い。
- 途中の計算も書くこと。最終的な解答しか書いていない時、減点される場合がある。

注意: 小テストの得点は、約 1.4 倍して加点する。ただし、第 1 回小テストは大問の 1.、第 2 回小テストは大問の 2.、第 3 回小テストは大問の 3. の配点以上には加点しない。したがって、うまくいかなかった小テストに対応する問題を中心に解く方が得点は増えます。

すべての問題で、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったもの (解答にはプランク定数ではなく \hbar を使いなさい)、 k_B は、ボルツマン定数を表し、 T は温度、 $\beta \equiv 1/(k_B T)$ とする。また、 V は体積、 N は粒子数で、 V も N も充分大きく、 $1/V$ や $1/N$ は無視する。 N/V は無視しない。1 粒子の状態は密に詰まっている。特に断りがなければ平衡状態を考える。

1. 状態密度 $D(\epsilon)$ が内部自由度を含めて

$$D(\epsilon) = \begin{cases} 0 & \epsilon \leq 0 \\ VD_0 & 0 < \epsilon < \epsilon_0 \\ 0 & \epsilon_0 \leq \epsilon < \epsilon_1 \\ VD_0 & \epsilon_1 \leq \epsilon \end{cases} \quad (1)$$

で与えられている理想フェルミ気体を考える。ここで、 D_0 は ϵ によらない正の定数を表す。グランドカノニカル分布を使って、次の問いに答えなさい。

(a) $T = 0$ における化学ポテンシャル (フェルミエネルギー) ϵ_F を求めなさい。ただし、 $N > VD_0\epsilon_0$ とする。

(b) $T = 0$ での系の全エネルギー E を V 、 D_0 、 ϵ_0 、 ϵ_1 と ϵ_F で表しなさい。

(c) $T = 0$ での圧力 P を V 、 N 、 ϵ_F 、 E で表しなさい。ただし、圧力を求めるのに

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S, N} \quad (2)$$

の公式を使った場合、エントロピー S をなぜ一定と考えて微分が出来るか説明しなさい。

2. 状態密度 $D(\epsilon)$ が内部自由度を含めて

$$D(\epsilon) = \begin{cases} VD_0\epsilon^n & \epsilon \geq 0 \\ 0 & \epsilon < 0 \end{cases} \quad (3)$$

で与えられている理想ボース気体を考える。ここで、 D_0 と n は ϵ によらない正の定数 ($D_0 > 0$ 、 $n > 0$) を表す。グランドカノニカル分布を使って次の問いに答えなさい。ただし、解答には

$$\eta(y) \equiv \int_0^\infty \frac{x^y}{e^x - 1} dx \quad (4)$$

で定義される関数 $\eta(y)$ を使ってもよい。ここで、 y は n で表される。

- (a) 温度と粒子数を一定にして、圧力を低圧から上げていくと、ちょうど P_B の値でボース-アインシュタイン凝縮 (BEC) が起こった。つまり、 P_B より低い圧力では凝縮が起こらなかつたが、ちょうど P_B で凝縮が起きた。 P_B を求めなさい。ただし、

$$PV = -k_B T \sum_l \ln(1 - e^{-\beta(\epsilon_l - \mu)}) \quad (5)$$

を使っても良いが、 ϵ_l の記号は最終的な答えに使ってははいけない。

- (b) 以下の (6) 式ように、前問の最終状態 (ちょうど BEC が起こった状態) A から温度を $T/2$ に下げ (状態 B)、その温度のまま、今度は体積を増加させた所、 V_B で BEC が起こらなくなつた (状態 C)。 V_B を V と n で表しなさい。ただし、粒子数は N のまま変わらない。

$$A(T, V, N):BEC \rightarrow B(T/2, V, N):BEC \rightarrow C(T/2, V_B, N):BEC \text{ でなくなる} \quad (6)$$

また、BEC が起こつても起こらなくても成り立つ次の公式を使っても良い。

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} d\epsilon + N_0 \quad (7)$$

3. 水素分子の理想気体を量子論的にカノニカル分布で考える。水素原子は、スピン $1/2$ のフェルミ粒子で、慣性モーメント I を持った剛体回転子とする。分子 1 個の回転運動のエネルギー準位は、方位量子数 ℓ を使って、

$$\epsilon_\ell = \frac{\hbar^2}{2I} \ell(\ell + 1) \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

で与えられ、その縮退度は $2\ell + 1$ である。 $\Theta = \hbar^2/(2Ik_B)$ とすると温度 T が $T \ll \Theta$ の低温の極限で $\ell > 1$ を無視するとき、分子 1 個あたりの内部エネルギーに対する、回転とスピンの寄与 ϵ_H と、同じ慣性モーメントを持った異核 2 原子分子の回転の寄与 ϵ_0 の比 ϵ_H/ϵ_0 を求めよ。ただし、スピンの固有関数について粒子を入れかえた時に符号が変わらないものから計算した分配関数を z_S 、変わるものから計算した分配関数を z_A とすると、水素分子は $z_S = 3$ 、 $z_A = 1$ と計算できる。また、 $|x| \ll 1$ となる x について

$$\ln(1 + x) \approx x \quad (9)$$

となることを使ってもよい。さらに、エネルギー E は、

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln j \quad (10)$$

で与えられる。

4. 相転移現象についてランダウ自由エネルギー $F(M, T)$ を次のように与える。

$$F(M, T) = F_0(T) + a(e^{bT} - c)M^2 + \frac{d}{4}M^4 \quad (11)$$

ここで、 $F_0(T)$ は M によらない T の関数、 a 、 b 、 c 、 d はすべて T にも M にもよらない正の定数を表す。相転移が起こる温度 T_c と、その温度での比熱のとびの絶対値 Δc を求めなさい。 Δc は T_c を使って表しても良い。また、必要なら次の公式を使いなさい。

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (12)$$

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} \quad (13)$$