$k_{\mathrm{B}}$ は、ボルツマン定数を表し、$T$ は温度、$\hbar$ はプランク定数を $2\pi$ で割ったものを表す。また、$\beta \equiv 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ を使っても良い。

1. 充分大きい体積 $V$ の容器に、粒子数 $N(>> 1)$ の理想ボース気体が入っている。$T \leq T_B$ でボース-アインシュタイン凝縮 (BEC) が起こるとして、以下の問いに答えよ。ただし、1 粒子の状態が密に詰まっているとして状態密度を $D(\epsilon)$ とし、さらに化学ポテンシャルを $\mu$ とする。

(a) $T > T_B$ の時、この気体の $N$ は次の様に書けた。

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon \tag{1}$$

$f(\epsilon)$ を求めなさい。$D(\epsilon)$ を使っても良い。

(b) $T < T_B$ の時、$N$ を表す式を、上の問題と同様な積分 (全く同じではない) とそれ以外の項の和で書きなさい。ただし、基底状態の粒子数 $N_0$ を使え。

(c) 今、状態密度 $D(\epsilon)$ として、

$$D(\epsilon) = \begin{cases} V D_0 \epsilon^n & \epsilon > 0 \\ 0 & \epsilon \leq 0 \end{cases} \tag{2}$$

を考える。ここで $D_0$ と $n$ は $\epsilon$ によらない正の定数を表す。与えられた $N$ に対して、$T_B$ を決める式として、

$$\int_0^{\infty} g(\epsilon) d\epsilon = 1 \tag{3}$$

を考える時、$g(\epsilon)$ を求めなさい。ただし、$D(\epsilon)$ を使ってはいけない。

(d) (3) 式を $x = \beta_B \epsilon$ と変数変換をして、

$$\int_0^{\infty} h(x) dx = 1 \tag{4}$$

と書く時、$h(x)$ を求めなさい。ただし、$\beta_B \equiv 1/(k_{\mathrm{B}}T_B)$ で、$\epsilon$ は使ってはいけない。

(e) 上記の問の答を使って、$D(\epsilon)$ が (2) 式の時の $T_B$ を求めなさい。ただし、解答には

$$\eta(y) \equiv \int_0^{\infty} \frac{x^y}{e^x - 1} dx \tag{5}$$

で定義される関数 $\eta(y)$ を使うこと。ここで、$y$ は $n$ で表される。

2. 温度 $T$ の異核2原子分子からなる理想気体を考える。分子を慣性モーメント $I$ の剛体回転子とすると、回転運動のエネルギー固有値は、

$$\epsilon_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) \qquad (l = 0, 1, 2, \dots) \tag{6}$$

で与えられる。回転運動の固有状態を指定する量子数は、$l$ の他に $m$ もあり、$-l \leq m \leq l$。

(a) 1 分子の分配関数に対する回転運動の寄与 $j_{\mathrm{r}ot}$ を $l$ についての級数で表しなさい。

(b) 前問の $j_{\mathrm{r}ot}$ の級数に対して、低温の極限で、絶対値が最も大きい項を 3 つ書きなさい。

(c) 1 分子のヘルムホルツの自由エネルギーに対する回転運動の寄与 $f_{\mathrm{rot}}$ についても、ある級数で書ける。低温の極限で、絶対値が最も大きい項を 1 つ書きなさい。次の公式を使っても良いが、$x$、$F$、$Z$ を答えに書いてはいけない。

$$|x| << 1 \text{ で、} \qquad \ln(1+x) \simeq x \tag{7}$$

$$F = -k_{\mathrm{B}} T \ln Z \tag{8}$$